

JESÚS URÍAS

UNA INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA TEÓRICA

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

D.R. © 2024 by Jesús Urías (San Luis Potosí, S.L.P. México)

ISBN:

Hecho en SLP

P r e f a c i o

Las notas las fui escribiendo conforme avanzaba el curso de *Física Teórica I* (para el 3er semestre de Matemáticas Aplicadas en la Facultad de Ciencias de la UASLP). Fueron pensadas para ser una primera exposición de un marco teórico formal para la mecánica clásica, partiendo de los antecedentes que tiene un estudiante del tercer semestre; el propósito del curso es reunir en un marco teórico coherente los tópicos estudiados en cursos anteriores de física general.

El tema del curso es la mecánica clásica, salpicada con algunos ejemplos no lineales; siempre siguiendo la pauta de la «física teórica» que busca elaborar modelos matemáticos de los fenómenos que evolucionan con el tiempo. Modelos matemáticos para los fenómenos naturales (físicos, biológicos), tecnológicos (ingeniería), económicos, sociales, etc.

Además de los métodos deductivos propios de la matemática, la física teórica hace uso de métodos semi-empíricos (que constituyen la llamada *fenomenología*) para obtener información de los sistemas a modelar, recurriendo a experimentos ya sea reales o computacionales (que pueden ser cálculos numéricos o simulaciones).

La elección de temas para el curso de *Física Teórica I* supone conocidas las nociones elementales de la mecánica clásica (como fuerza, aceleración, energía, etc.) que se aprendieron en los cursos de física general.

Los vectores en un espacio euclidiano tienen un sentido geométrico que es esencial para la mecánica teórica.[13] Como preparación al estudio del movimiento de los objetos materiales primero se revisan conceptos del cálculo vectorial para la

descripción de las trayectorias de una partícula en el espacio $\mathbb{R}^3$ euclidiano y sus órbitas en el espacio de fase; solo se revisan los conceptos que son necesarios para luego formular el marco teórico de la mecánica.

Aunque los fundamentos teóricos de la mecánica son muy simples, con los siglos se ha constituido un cuerpo de modelos matemáticos de casos y aplicaciones tremendamente rico: las situaciones particulares son muy importantes en la física y en la ingeniería.

El plan del curso es aplicar la teoría para modelar ejemplos simples que tienen una solución analítica «cerrada y sencilla» o que ilustran el uso de una cierta metodología. Ejemplos tomados de la gran variedad de movimientos en la Tierra plana, el movimiento armónico simple y el de los planetas (en atracción gravitacional con el Sol), en especial las leyes de Kepler.

Por último se explora la mecánica en los sistemas no inerciales, tomando como ejemplo un sistema de referencia en rotación. Veremos cómo el péndulo de Foucault le da la razón a Galileo. Cuenta la leyenda que Foucault invitó a Pío IX a visitar Santa Genoveva (El Panteón en París, donde se instaló el péndulo por primera vez) para que viera con sus propios ojos que «...y *sin embargo se mueve*». ¹ Los sistemas en rotación constituyen una vía introductoria a los sistemas no-inerciales que deben ser de gran interés para los estudiantes que van para ingenieros mecánicos.

Temas como el cuerpo rígido (en especial el trompo) y los medios continuos elásticos quedan fuera de la perspectiva del curso: son fenómenos complejos para el curso avanzado de mecánica[7] que llevan los físicos.

Aquí llegamos al borde de lo simple y soluble, punto en el que el curso finaliza; intentamos llevar la formulación y aplicaciones a base de fuerzas al límite; de aquí en adelante otras

1. En realidad fue el inepto de *Luis* Bonaparte (alias Napoleón III, pero no hay que confundirlo con Pepe Botella, el primer Pepe rey de España) quien invitó a Pío IX a visitar la remodelada Santa Genoveva que sería convertida en El Panteón. Galileo fue «rehabilitado» en 1992 por Juan Pablo II, 359 años después de haber sido «tiránicamente» condenado. En la física Galileo siempre estuvo vigente, nunca tuvo la física necesidad de «rehabilitar» a Galileo.

formulaciones teóricas de la mecánica clásica son más convenientes y poderosas.[7, 8, 4]

En cualquier formulación, el problema de tres cuerpos en atracción gravitacional es irresoluble; este problema obligó a Poincaré a desarrollar nuevas técnicas matemáticas, aplicando de manera notable la rama de la topología en matemáticas: aquí nace la teoría de los sistemas dinámicos. Esto lo estudiarán en otros cursos avanzados, donde traten la teoría del caos,[8]² que desarrolla métodos para conocer propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales sin resolverlas (de ninguna manera).[3]

Otro propósito del curso es que los estudiantes logren un entrenamiento firme para el estudio posterior de otros tópicos avanzados (no solo de mecánica clásica) por lo que les recomiendo que traten de resolver el mayor número de ejercicios que vienen en [17] y que los discutan en *sesiones de problemas: discutiendo se abre la mente*. Mis notas quedan en deuda con los ejercicios, pero las referencias [18, 17] ofrecen muchos más de los que puedan resolver en un semestre.

Para la preparación de las notas me apoyé en la referencia [17] en lo relativo a mecánica. Para las cuestiones de cálculo vectorial me apoyé en la referencia [13]. De las dos tomé prestadas algunas figuras. Para apoyo en ecuaciones diferenciales les recomiendo consultar el libro de Devaney *et al.* [4]. Los temas de álgebra lineal pueden consultarse en el libro [11]. Todos los temas incluidos en mis notas son tratados en la referencia [18] de manera mucho más amplia y con más ejemplos.

San Luis Potosí,
verano-otoño del 2024

-
2. Una lectura recomendable sobre el amplio panorama de los sistemas complejos es el libro de Pedro Miramontes, *Río de tiempo y agua*, [14] de venta en el Instituto de Física, UASLP; a un precio muy accesible.

G r a t i t u d e s

En el verano de 2024 Edgardo Ugalde me convenció para que impartiera el curso de Física Teórica I para los estudiantes de la carrera de Matemáticas Aplicadas de la FC-UASLP. Consultando el programa oficial del curso, elaborado hace muchos años por el muy-querido maestro Joaquín Sada (RIP), me enteré que el reto consistía en presentar a estudiantes muy jóvenes (del 3er semestre de licenciatura) una primera introducción a la mecánica teórica. A los dos les agradezco por haberme embarcado en este viaje y agradezco a los estudiantes por haber hecho el viaje muy agradable.

Este libro representa mi selección de temas y la progresión que considero conduce a integrar un marco teórico formal de la mecánica clásica, construido sobre la base del concepto de *fuerza*. Terminado el curso continué el trabajo de edición de las notas, que ahora contiene algunos agregados pero conservando el propósito original. El resultado lo sometí a la consideración de Yuri Nahmad, miembro del consejo editorial del proyecto *Ediciones del Instituto de Física* (UASLP), para sus publicación. A Yuri le agradezco su generoso apoyo editorial, además de otros muchos gestos de amistad.

El péndulo de Foucault es un experimento «delicado» y es el experimento *mecánico* más recordado del siglo XIX. Para el curso de Física Teórica I tiene un gran valor propedeutico por mostrar de manera sencilla cómo tratar la mecánica en los sistemas no-inerciales; el experimento tiene profundas implicaciones en cuanto a la naturaleza física del movimiento acelerado y de la acción de las llamadas *fuerzas ficticias*.

En México existen cinco péndulos de Foucault y el péndulo de la UASLP (de excelente calidad técnica) es uno de ellos. El péndulo fue instalado en la CIACYT (UASLP) por iniciativa de José Nieto, quien convocó y coordinó al equipo de expertos que lo hicieron una realidad. Por esto (y otras muchas cosas más) estamos muy agradecidos con Pepe. Como un apéndice al Capítulo 6 incluyo una breve reseña histórica sobre los orígenes del péndulo en El Panteón (París, Francia) y del péndulo en la UASLP; reseña escrita por Nieto y Grech. A ambos les expreso mi agradecimiento.

JOSÉ NIETO NAVARRO. Es profesor jubilado de la UASLP que ha contribuido notablemente al fortalecimiento de una comunidad en la UASLP dedicada a la creación en las ciencias y en la cultura. La instalación del péndulo de Foucault en la CIACYT fue una de sus muchas iniciativas; Pepe tuvo (y tiene) la capacidad de convocatoria para reunir un equipo de expertos diversos que hizo realidad un péndulo de primera calidad. Pepe recibió un doctorado de la Universidad de Montpellier (Francia) y ahora vive en la hermana República de Chile.

PIERRE GRECH. Es ingeniero de investigación (en el área de las cavidades ópticas semiconductoras y en microscopía electrónica) en el Centro de Electrónica y Micro-optoelectrónica de Montpellier (Francia). Su pasión no-profesional es la astronomía y la fotografía de arte en la física. Pierre tiene fotos de arte en la revista francesa *La Recherche*, que difunde el conocimiento científico a un público amplio.

Abuso de las bondades del proyecto *Ediciones del Instituto de Física* (UASLP) usando este espacio para expresar mi reconocimiento a la tenaz persistencia de Jean Pestieau en mi presente como un elemento prominente de un pasado vivo y sin confines. Por este privilegio agradezco a los editores Gallo y Yuri.

JEAN PESTIEAU (1942–2022). A su regreso a la Universidad Católica de Lovaina (UCL, Bélgica) al término de una estancia como profesor visitante en el CINVESTAV-IPN Jean mantuvo el contacto y fue director de tesis (en física de partículas elementales) en la UCL de una larga serie de estudiantes mexicanos y fue designado *Miembro Correspondiente* por la Academia Mexicana de Ciencias. Jean murió siendo Profesor Emérito de la UCL y vivió combatiendo con un gran corazón toda forma de dominación y subordinación.

No me pongan hamburguesas
en mi plaza principal,
tamalitos de chipil
sentados en la banqueta
vamos a comer.

No me digan
«otra ruta no hay»,
frente a mí tengo sin fin
un camino que gozo
con mi gente al avanzar.

En el Colegio Nacional
nunca me dejé enjaular.



Manteniendo vivo el espíritu de
Francisco Toledo

Índice general

P R E F A C I O	I
G r a t i t u d e s	IV
1. PRELIMINARES VECTORIALES	1
1.1. Trayectorias	2
1.2. La distancia recorrida	4
1.3. Velocidad	6
1.4. Aceleración	7
1.5. El vector tangente unitario	7
1.6. El vector normal unitario principal	7
1.7. El vector unitario binormal	8
1.8. Sistema de referencia local	9
1.9. El espacio de fase	10
1.10. Ejercicios	12
2. LA MECÁNICA DEL MOVIMIENTO	13
2.1. Los axiomas mecánicos	14
2.2. Los modelos mecánicos	16
2.3. Los sistemas de referencia inerciales	18
2.4. Campos de fuerza	20
2.5. El campo gradiente	21
2.6. Trabajo y energía	25
2.7. Impulso y momento	28
2.8. Torque y momento angular	29
2.9. Constantes del movimiento	31
2.10. Ejercicios	33
3. MECÁNICA EN LA TIERRA PLANA	35
3.1. Movimiento libre	35
3.2. Conservación de la energía	36
3.3. Piedras en caída libre	37
3.4. Un solitario de pelota	38

3.5.	Jugando pelota con una compañera	40
3.6.	La resbaladilla recta	42
3.7.	La resbaladilla esférica	44
3.8.	La resbaladilla rugosa	48
3.9.	El bádminton	50
3.10.	Fuerzas disipativas y conservativas	53
3.11.	El péndulo	56
3.12.	Una versión discreta del péndulo	63
3.13.	Formas en equilibrio	65
3.14.	Ejercicios	68
	Algoritmo iterativo simple	70
4.	OSCILADORES LINEALES	73
4.1.	El oscilador armónico	73
4.2.	Amplitud, periodo y frecuencia	78
4.3.	La energía	80
4.4.	El oscilador amortiguado	80
4.5.	Lineales autónomos bidimensionales	87
4.6.	Un diagrama de fases: determinante vs traza	89
4.7.	Solución general del lineal autónomo 2D	92
4.8.	El oscilador forzado periódicamente	96
4.9.	Forzamiento no amortiguado	100
4.10.	Forzamiento fuera de resonancia	102
4.11.	Forzamiento en resonancia	104
4.12.	Ejercicios	106
5.	EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	111
5.1.	El cielo que nos cobija de noche	111
5.2.	Construcción de un modelo	112
5.3.	Cambio de variables	115
5.4.	Conservación del momento angular	116
5.5.	La segunda ley de Kepler	117
5.6.	Conservación de la energía	118
5.7.	La primera ley de Kepler	120
5.8.	Nota bene	123
5.9.	La tercera ley de Kepler	123
5.10.	Ejercicios	125
6.	SISTEMAS DE REFERENCIA EN ROTACIÓN	127
6.1.	Motivación	127

6.2.	Uno está fijo y el otro rota	129
6.3.	La acción del producto cruz es lineal	133
6.4.	El movimiento de los vectores	134
6.5.	Uno está fijo y el que rota se traslada	136
6.6.	Las fuerzas ficticias en el que rota	138
6.7.	El péndulo de Foucault	139
6.8.	El análisis de fuerzas	140
6.9.	El péndulo sobre la Tierra	142
6.10.	Solución de las ecuaciones	144
6.11.	Discusión y un experimento	146
6.12.	Ejercicios	148
	El péndulo de Foucault en la UASLP	
	José Nieto y Pierre Grech	152
	TABLA DE CONVERSIÓN CGS-SI	157
	BIBLIOGRAFÍA	159

Capítulo 1

Preliminares vectoriales

La mecánica teórica del movimiento elabora modelos matemáticos que dan una estructura formal a las observaciones hechas (datos tomados) en relación a un sistema de coordenadas, llamado *sistema de referencia*, en el cual se ubican los objetos y se especifican las condiciones de su movimiento (velocidad, aceleración, etc.) por medio de vectores coordenados.

El modelo matemático del espacio físico en la mecánica teórica es el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, provisto de la base estándar $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, constituida por los vectores coordenados

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema de referencia provisto por la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ es un *sistema cartesiano* y los elementos de $\mathbb{R}^3$ son vectores columna, por ejemplo

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

Convenimos en que $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ y decimos que el sistema de coordenadas tiene orientación positiva (por la regla de la mano derecha).

El producto escalar

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = xp_x + yp_y + zp_z$$

hace de $\mathbb{R}^3$ una geometría euclidiana. Las distancias son medidas usando la norma de los vectores

$$\|\mathbf{r}\| = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

que es llamado teorema de Pitágoras. Los ángulos son determinados mediante el producto escalar y la norma

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{p}\|},$$

siendo $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$.

Ejemplo 1.1. Los vectores de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tienen producto interior cero entre ellos,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

por lo que (geométricamente) son ortogonales entre ellos, formando ángulos de 90° (de $\pi/2$ radianes). $\square$

Ejemplo 1.2. Los vectores $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{y} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ forman un ángulo θ con coseno

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \frac{11}{29} \approx 0.379 \rightarrow \theta \approx 67^\circ.$$

La distancia entre los puntos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(2-2)^2 + (-3-3)^2 + (4-4)^2} = 6. \quad \square$$

Los vectores descritos anteriormente tienen la interpretación de un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$ euclidiano (el punto $\mathbf{x}$). Otros vectores son los segmentos dirigidos que trasladan de un punto a otro punto; por ejemplo la traslación $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ lleva del punto $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{y}$.

Hay vectores “externos” diferentes a los segmentos dirigidos, como la velocidad $\mathbf{v}$ y la fuerza $\mathbf{F}$. Estos vectores externos se ubican en el punto donde está la partícula y constituyen campos vectoriales.

Un tercer tipo de vectores (también externos al espacio) son los vectores axiales que representan ejes de rotación, como el torque $\mathbf{\Lambda}$ y el momento angular $\mathbf{L}$, y en el punto donde se ubiquen actúan por rotación; mientras que una fuerza, en el punto donde se le ubique, actúa por desplazamiento.

1.1. Trayectorias

El movimiento que tiene la descripción matemática más simple es el de una partícula. Una *partícula* es la abstracción de un cuerpo material que es despojado de su extensión espacial, reducido a solo un punto matemático, en el que se concentra

toda su masa, y deja de ser un objeto físico real. Las partículas no son entidades del mundo, aunque Marte en la noche parezca una partícula brillante roja en el cielo.

El concepto de partícula es útil para desarrollar el marco teórico de la mecánica y porque hay situaciones importantes en las que un cuerpo físico real (como la Luna) puede ser tratado en la teoría como si fuese una partícula. Se recomienda siempre empezar con los modelos matemáticos más simples (y luego, si funcionan bien, justificarlos).

La *trayectoria* de una partícula en el espacio se describe por un parámetro t , mediante una función $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, que es el vector de posición de la partícula en el espacio. Lo usual es que la variable $t \in I$ sea el tiempo, pero hay ocasiones en que puede ser una variable independiente y que podemos manejar a voluntad. De cualquier manera, nos referimos a t como «el tiempo».

El dominio de la trayectoria $\mathbf{r}$ es un intervalo de tiempo que tiene como extremos al *tiempo inicial* $t = t_0$ y al *tiempo final* $t = t_f$, el dominio de $\mathbf{r}$ es $I = [t_0, t_f]$. En el sistema de referencia cartesiano provisto por la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la posición de una partícula al tiempo t es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{z},\end{aligned}$$

con $t \in I = [t_0, t_f]$.

Frecuentemente escribiremos a los vectores de manera horizontal, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$, pero indicando con el índice t que hay que transponer el renglón en columna.

Ejemplo 1.3. La trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t/8} \\ 4 \cos(8\pi t) \\ 5 \sin(8\pi t) \end{pmatrix}, \quad I = [0, 35].$$

es un resorte elipsoidal que avanza en la dirección negativa al eje- x (con helicidad negativa), comprimiéndose sobre el plano $x = 0$, el plano formado por los ejes z y y .

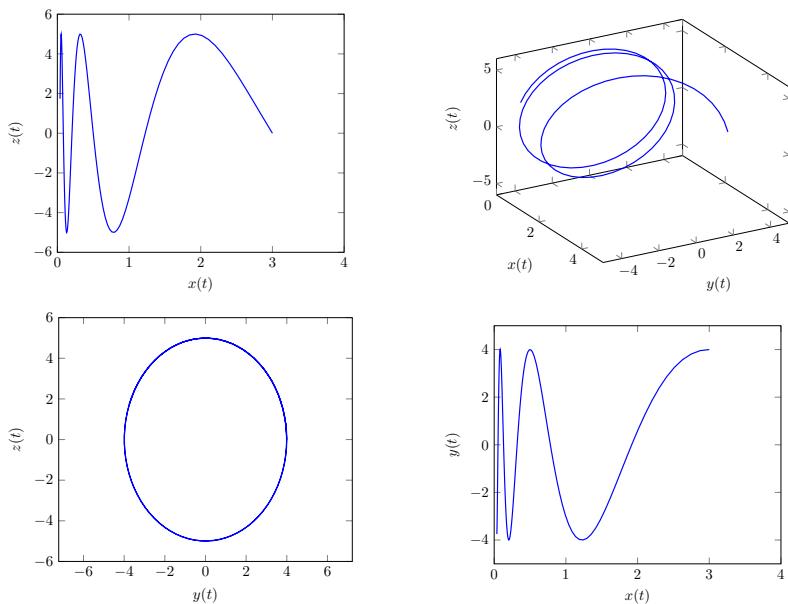


Figura 1.1

La trayectoria se grafica en la figura 1.1. También se grafican las proyecciones ortogonales

$$\mathbf{r}_{xy}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{zx}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{yz}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

sobre los planos x - y , x - z y y - z , y que son muy útiles para elaborar una imagen mental 3D de la trayectoria. $\square$

1.2. La distancia recorrida

La trayectoria $\mathbf{r}(t)$ es el recorrido de una partícula desde el tiempo inicial t_0 y terminando en el tiempo final t_f . Una primera cantidad de interés es la distancia L recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria en el tiempo de t_0 a t_f .

La distancia recorrida es la longitud de la trayectoria que se calcula avanzando a saltos de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t + dt)$ y sumando las longitudes de los saltos

$$\|\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)\| = \|d\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{dx(t)^2 + dy(t)^2 + dz(t)^2} = ds(t)$$

desde $t = t_0$ hasta $t = t_f$,

$$L = \int_{t_0}^{t_f} ds(t) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \quad (1.1)$$

donde $\dot{x} = dx/dt$ y similar para $\dot{y}$ y $\dot{z}$. La distancia que se ha recorrido al llegar el tiempo $t \in I$ es

$$s(t) = \int_{t_0}^t ds. \quad (1.2)$$

La función $s = s(t)$ se considera como un cambio de la variable de tiempo t , por la variable $s =$ otra manera de medir el tiempo por medio de la distancia que se ha recorrido, $s(t)$. En los puntos extremos de la trayectoria se tiene que $s(t_0) = 0$ y $s(t_f) = L$. El cambio de variable $s = s(t)$ es muy útil cuando lo que importa son los aspectos geométricos de la trayectoria.

El sentido geométrico de la fórmula para calcular la longitud de una trayectoria se ilustra en la figura 1.2. En la práctica es frecuente que las integrales de longitud (1.1) sean tremendamente complicadas y no tengan una expresión analítica cerrada.

Ejemplo 1.4. Para la trayectoria del ejemplo 1.3 se tiene que

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/8}, \quad \dot{y}(t) = -32\pi \sin(8\pi t), \quad \dot{z}(t) = 40\pi \cos(8\pi t),$$

por lo que la distancia recorrida por la partícula es la integral

$$L = \int_0^{35} \left(\frac{1}{4}e^{-t/4} + (32\pi)^2 \sin^2(8\pi t) + (40\pi)^2 \cos^2(8\pi t) \right)^{1/2} dt$$

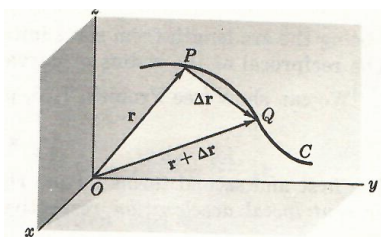
que no se ve nada sencilla. □

Figura 1.2

La longitud del arco entre los puntos P y Q es Δs y

$$\|\Delta \mathbf{r}\| \leq \Delta s.$$

En el límite $\Delta t \rightarrow dt$ se tiene que $ds = \|\mathbf{dr}\|$ y la suma de segmentos a lo largo de la trayectoria es la longitud $L = \int ds$.



Tomada de [17].

Ejemplo 1.5. Una partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio r , sobre el plano $z = 0$ y con frecuencia angular ω ,

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0)^t.$$

La distancia recorrida a partir del tiempo inicial $t_0 = 0$ es

$$s(t) = \int_0^t \left((\omega r)^2 \sin^2(\omega t) + (\omega r)^2 \cos^2(\omega t) \right)^{1/2} dt = r\omega t,$$

que define la nueva variable $s = r\omega t$.

La partícula recorre la longitud $L = 2\pi r$ de una vuelta completa sobre el círculo al llegar el tiempo T , dado por la solución a la ecuación $2\pi r = s(T) = r\omega T$; ese tiempo es $T = 2\pi/\omega$. $\square$

1.3. Velocidad

La *velocidad* al tiempo t , en el punto P de la trayectoria mostrada en la figura 1.2 y en el límite $Q \rightarrow P$, es el vector de desplazamiento $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)$ dividido entre el tiempo dt empleado para recorrerlo,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)}{dt},$$

que es un vector tangente a la trayectoria en el punto $\mathbf{r}(t)$. En términos de los vectores de la base, la posición al tiempo t es $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ y la velocidad es la derivada

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}.$$

La magnitud de la velocidad es

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 \right)^{1/2} = \frac{\|d\mathbf{r}\|}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

Ejemplo 1.6. Para la trayectoria del ejemplo 1.3, tomando las derivadas del ejemplo 1.4, la velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/8}\mathbf{i} - 32\pi \sin(8\pi t)\mathbf{j} + 40\pi \cos(8\pi t)\mathbf{k}. \quad \square$$

1.4. Aceleración

La *aceleración* de la partícula en el punto P de la trayectoria, al tiempo t , es

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k},$$

donde $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ y similar para y y z . El valor absoluto de la aceleración es

$$\|\mathbf{a}\| = \left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 \right)^{1/2}.$$

1.5. El vector tangente unitario

Dado que $\|d\mathbf{r}\| = ds$, y considerando el cambio de variable $s = s(t)$, el vector $\mathbf{T}$ en el punto P de la trayectoria que se define por la derivada

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1.3)$$

está normalizado a uno (es *unitario*).

Se tiene que $\|\mathbf{T}\| = 1$ y que $\mathbf{T}$ es tangente a la trayectoria pues, por la regla de la cadena se tiene que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \|\mathbf{v}\| = \mathbf{T} \|\mathbf{v}\|,$$

esto es que el vector $\mathbf{T}$ definido en (1.3) es un vector unitario en la dirección de la velocidad $\mathbf{v}$ en el punto P ,

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v},$$

y $\mathbf{v}$ es tangente a la trayectoria en P , por tanto se llama a $\mathbf{T}$ el *vector tangente unitario* en P y es considerado como una función de s . El cambio de variable entre s y t lo da la función en (1.2).

1.6. El vector normal unitario principal

El vector tangente unitario $\mathbf{T}$ define en el punto P de la trayectoria el plano que es perpendicular a $\mathbf{T}$. Ese plano se define por medio de dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{T}$ y la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ lo atraviesa perpendicularmente.

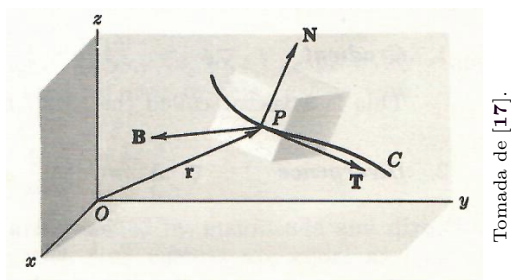


Figura 1.3

El *vector normal unitario principal* se deriva de la condición de normalización $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$. Derivando respecto a s se obtiene que

$$\frac{d}{ds} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0,$$

donde se observa que el vector

$$\mathbf{N} = R \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

es perpendicular a $\mathbf{T}$ y está por tanto sobre el plano que es perpendicular a la trayectoria en el punto P . La constante R se define positiva, para hacer unitario a $\mathbf{N}$ y tiene el sentido geométrico de un *radio de curvatura* de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en el punto P ; se define como sigue

$$\frac{1}{R} = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \kappa.$$

El inverso de R , κ , es la *curvatura* de $\mathbf{r}(t)$ en P . El vector $\mathbf{N}$ es el *vector normal unitario principal* en P .

1.7. El vector unitario binormal

El tercer vector en P , denotado $\mathbf{B}$, se elige siendo normal al vector tangente $\mathbf{T}$ y al vector normal-principal $\mathbf{N}$ y por eso se le llama el *vector unitario binormal* (dos veces normal). Se define a $\mathbf{B}$ mediante el producto cruz

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \tag{1.4}$$

y por tanto $\mathbf{B}$ es un vector axial (por eje), $\mathbf{B}$ es un eje de torsión (en inglés sería *twist*). Por las propiedades del producto cruz se tiene que $\|\mathbf{B}\| = 1$ y $\mathbf{B}$ es normal a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{N}$.

1.8. Sistema de referencia local

La lista de vectores unitarios $S = (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ es la base ortonormal de un sistema de referencia local al punto P de la trayectoria, ilustrado gráficamente en la figura 1.3. La condición de ortonormalidad de S queda expresada en la siguientes relaciones vectoriales,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{N} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T},$$

que además nos dicen que S tiene orientación positiva (es de mano derecha). El teorema fundamental de las curvas en $\mathbb{R}^3$ euclidiano establece que una curva está determinada (hasta una traslación rígida) por la curvatura (suponiendo que nunca es cero) $\kappa(s)$ y su *torsión* $\tau(s)$ (que no definimos). Una introducción elemental se encuentra en [15, pp.36–43].

La base ortonormal local S permite expandir cualquier vector ubicado en el punto P , como por ejemplo la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$, mediante una combinación lineal de los vectores de S . Para la velocidad se tiene

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{T}(s(t)), \quad \text{con coeficiente } v(t) = \|\mathbf{v}\| \text{ y } s = s(t).$$

La expansión de la aceleración se obtiene derivando respecto a t la velocidad,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{v} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \dot{v} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \dot{v} \mathbf{T} + \frac{v^2}{R} \mathbf{N} = \dot{v} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

La aceleración tiene dos componentes; la que es proporcional a $\mathbf{T}$ se llama la *aceleración tangencial* (con la magnitud $\dot{v}$) y la componente que es proporcional a $\mathbf{N}$ (con la magnitud v^2/R) se llama la *aceleración centrípeta* (que busca ir al centro); mientras más «cerrada» es una curva (radio R pequeño) mayor es la componente centrípeta de la aceleración.

Ejemplo 1.7. Para el movimiento circular del ejemplo 1.5 la trayectoria es $\mathbf{r}(t) = r \cos(\omega t) \mathbf{i} + r \sin(\omega t) \mathbf{j}$, con el cambio de variable $s = r\omega t$. El vector tangencial unitario es

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = -\sin(s/r) \mathbf{i} + \cos(s/r) \mathbf{j}$$

Para determinar el vector normal principal $\mathbf{N}$ se calcula la derivada de $\mathbf{T}$,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{1}{r} \cos(s/r) \mathbf{i} - \frac{1}{r} \sin(s/r) \mathbf{j},$$

de donde el radio de curvatura R se obtiene a partir de la norma

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \quad \rightarrow \quad R = r.$$

Resulta que el radio de curvatura es constante y coincide con el radio r del círculo. El vector normal principal es

$$\mathbf{N}(s) = R \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos(s/r) \mathbf{i} - \sin(s/r) \mathbf{j},$$

y el vector binormal resulta de calcular el producto cruz

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{k},$$

por lo que la trayectoria al avanzar la partícula va torciendo su rumbo a un ritmo constante siguiendo el eje de torsión constante $\mathbf{k}$ (aplica la regla de la mano derecha). $\square$

1.9. El espacio de fase

Aunque los cuerpos que estudia la mecánica teórica se mueven en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, las soluciones de las ecuaciones de movimiento, que son ecuación diferenciales ordinarias, pueden ser representadas como curvas en un espacio $\mathbb{R}^n$ llamado *espacio de fase*.¹

Una ecuación diferencial ordinaria de grado n puede llevarse a la forma de una ecuación vectorial de primer orden en el espacio de fase

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{f}) \quad (1.6)$$

donde $\mathbf{f}$ es un punto en el espacio de fase y $\mathbf{V}(\mathbf{f})$ es el *campo de velocidades* en el espacio de fase $\mathbb{R}^n$. Una curva en el espacio de fase $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^t \in \mathbb{R}^n$ es una curva integral de la ecuación (1.6) si

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = (\dot{f}_1(t), \dots, \dot{f}_n(t))^t = \mathbf{V}(f_1(t), \dots, f_n(t)), \quad \forall t,$$

1. El nombre se remonta a Jacobi, pasando por Boltzmann, Ehrenfest y Gibbs. Decían que la fase (el estado) de un sistema podía ser representado por un punto en un espacio.

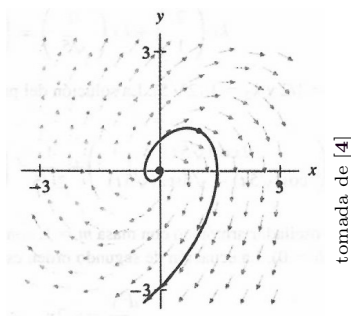


Figura 1.4

esto es que el vector tangente a una curva integral en el punto $\mathbf{f}$ es $\mathbf{V}(\mathbf{f})$. Además, una curva integral $\mathbf{f}(t)$ es una solución de la ecuación (1.6). El conjunto de curvas integrales de la ecuación diferencial (1.6) es el *flujo* generado por el campo de velocidades $\mathbf{V}$ en el espacio de fase. La gráfica de un flujo se llama *retrato de fase*.

A las curvas integrales en el espacio de fase de un sistema mecánico las llamaremos *órbitas* y a las curvas del movimiento en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ (donde pasa la vida) las llamaremos *trayectorias*.

Ejemplo 1.8. Para llevar al espacio de fase la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0$$

se introduce la nueva variable $y = \dot{x}$. Las ecuaciones para las variables x y y se derivan de la ecuación diferencial para x ,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \begin{pmatrix} y \\ -3x + 2y \end{pmatrix} = \mathbf{V}(\mathbf{f})$$

que tiene la forma (1.6), con el vector $\mathbf{f} = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$. El campo de velocidades es lineal y puede escribirse en la forma

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{f}.$$

Una gráfica del campo $\mathbf{V}(x, y) = (y, -3x + 2y)^t \in \mathbb{R}^2$ se muestra en la figura 1.4. El origen del espacio de fase es un punto

singular del campo $\mathbf{V}$. El origen es un *repulsor*, pues todas las velocidades de $\mathbf{V}$ mueven los puntos alejándolos del origen. También se muestra la gráfica de una curva integral sobrepuesta a la del campo. Las órbitas del sistema fluyen alejándose del punto repulsor. $\square$

Cuando las cosas se ponen difíciles, lo cual ocurre casi siempre, la geometría y la topología resultan herramientas muy poderosas en el espacio de fase. Este es el mejor lugar para explorar un sistema mecánico no lineal, un ejemplo no lineal simple es el péndulo. De las órbitas en el espacio de fase se extraen las trayectorias que observamos (los observables en general).

1.10. Ejercicios

1.1. Calcular la componente tangencial y la componente centrípeta de la aceleración para el movimiento circular tratado en los ejemplos 1.5 y 1.7.

1.2. Para la trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos 2t \mathbf{i} + 3 \sin 2t \mathbf{j} + (8t - 4) \mathbf{k}, \quad t \in [0, 8],$$

hacer lo siguiente.

1. Una gráfica 3D de la trayectoria. Recomendando usar el paquete `pgfplots` (incluido en el paquete `TikZ`) para $\text{\LaTeX}$ o el paquete `matplotlib` para `Python`.
2. Calcular el cambio de variable $s = s(t)$.
3. Calcular la lista de vectores unitarios $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.
4. Calcular la componente tangencial y la componente centrípeta de la aceleración.
5. Discutir el significado de todos los vectores calculados.

Capítulo 2

La mecánica del movimiento

La mecánica clásica es el estudio del movimiento (traslaciones y rotaciones) de los cuerpos en el espacio, en condiciones no-extremas. Todo ocurre a energías bajas y a escala macroscópica.

Históricamente la primera formulación teórica de la mecánica, la que es motivo del curso, descansa en el concepto de *fuerza*. Las nociones de trabajo, energía, impulso, cantidad de movimiento, etc. derivan todas de la noción de fuerza. En cambio la formulación lagrangiana [7] se levanta sobre el concepto de energía.

Para la mecánica teórica el *espacio*, el *tiempo* y la *materia* son indefinibles: son dados y ya no hay nada más que decir de ellos, solo elaborar modelos matemáticos. El observador de los fenómenos mecánicos usa un reloj para medir el tiempo, usa un sistema de referencia para ubicar las posiciones, las velocidades, los giros, etc. La masa de los objetos se puede medir con la ayuda de un resorte y de una *masa-patrón*. La primera convención fue que un centímetro cubico de agua es un gramo, ahora el patrón se basa en la constante de Plank.

El tiempo que se mide con el reloj, es el mismo para todos y el mismo en todos lados (una red extendida espacialmente de relojes sincronizados) y el correr de ese único tiempo no se ve afectado por las condiciones espaciales. El tiempo se mide en unidades «*primigenias*» (que no derivan de otras) como *segundos*, *meses*, *años*, etc. La manera más versátil de construir un reloj es adoptar un ritmo (una oscilación) arbitraria pero muy estable (por ejemplo generada con un cristal de cuarzo o con un oscilador atómico cuántico (un *maser*)); el reloj se termina de construir con una contador que va acumulando la cuenta de tic-tacs producidos por el oscilador.

En el espacio se ubican y se mueven los objetos materiales. La ubicación y las condiciones del movimiento se establecen con la ayuda de un sistema coordinado de referencia. Las unidades para las distancias también son primigenias y se usan *centímetros*, *metros*, *años-luz*, etc. Se adopta una vara (una regla o una longitud de onda) arbitraria pero de longitud muy estable como la unidad básica de distancia.

La masa es la propiedad de la materia (el parámetro) que establece la conexión dinámica (el parámetro de acoplamiento) entre la acción (las fuerzas) y el movimiento de la materia. Este parámetro se conoce como *masa inercial*. La teoría considera a los objetos materiales por su aporte de cantidades diversas de *masa* y por la manera en la que se distribuye en su cuerpo (por ejemplo en un trompo zangaruto). Las unidades primigenias de la masa pueden ser *gramos*, *toneladas*, *libras*, etc. La masa inercial puede medirse por las oscilaciones que produce con un resorte, comparando con las producidas por una masa que se elige como *patrón*.

Adoptamos para el curso de mecánica teórica el sistema de unidades que es el mejor para la física teórica (sobre todo al tratar con la electrodinámica, que por el momento no nos atañe). El mejor sistema para los teóricos es el *cgs*: las longitudes se miden en *centímetros* (cm), la masa en *gramos* (g) y el tiempo en *segundos* (s).

Para la mala fortuna de los físicos experimentales, los fabricantes de instrumentos venden sus aparatos calibrados en el sistema *mks* (también llamado SI). Los físicos teóricos deben familiarizarse con el sistema *cgs* y los experimentales con el sistema SI. Al final de las notas se incluye una tabla de conversión entre las unidades del *cgs* y las del SI.

Cuando sea necesario hacer explícitas las unidades de una variable, la encerramos entre corchetes. Por ejemplo, la variable t tiene unidades $[t] = \text{s}$, segundos.

2.1. Los axiomas mecánicos

Los axiomas sobre los que se levanta el aparato teórico de la mecánica clásica son conocidos como «leyes de Newton». En la exposición de los axiomas aparecen nociones indefinibles formalmente como lo son la «acción» y las «fuerzas».

Entenderemos por *acción* la influencia que un (o varios) agente(s) externo(s) ejerce(n) sobre un cuerpo mediante la *aplicación de fuerzas*. Por *fuerza* entenderemos todo lo que empuje, frene, jale, etc. al objeto material en estudio.

En situaciones prácticas la acción se ejerce tanto por fuerzas como por torques (por ejemplo el torque de Lorenz producido por un campo magnético sobre una carga eléctrica en movimiento, pero en el curso de mecánica consideraremos que $e = 0$ y $c = \infty$: para hacernos la vida fácil, supondremos que no existen cargas eléctricas ni electromagnetismo).

Pero no hay que olvidar que en el marco teórico descrito en el capítulo anterior las fuerzas se modelan por *vectores de desplazamiento* y los torques se modelan por *vectores axiales* (ejes de giro, el campo magnético es un campo de ejes de giro; Maxwell decía que el magnético era un campo de remolinos).

Procedemos a enunciar los axiomas mecánicos con la «acción por fuerzas» en mente.

1. *El principio inercial.*

Un cuerpo sobre el cual no se ejerce acción alguna, se mantiene en movimiento a una velocidad constante, incluida la velocidad cero (el reposo). Una acción es lo que puede alterar esta condición.

2. *El principio de acción.*

Si una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a velocidad $\mathbf{v}$, esta cambia al ritmo establecido por la fuerza $\mathbf{F}$,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el momento de la partícula. Si la masa es siempre la misma, entonces $m d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, con la aceleración $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$. El efecto de la acción sobre el movimiento lo da m , la *masa inercial*.

3. *El principio anti-bootstrap.*¹

Si dos cuerpos —libres de toda acción externa— ejercen acción mutua, digamos que el cuerpo 1 actúa sobre el cuerpo 2 con la fuerza $\mathbf{F}_1$ y que el cuerpo 2 actúa sobre el cuerpo 1

1. *Bootstrap* here refers to “pulling oneself up by one’s bootstraps.”

con la fuerza $\mathbf{F}_2$, la fuerza neta es nula,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0.$$

Otra manera de enunciar este principio es diciendo que la suma de «fuerzas internas» es cero.

Para justificar el nombre de «principio anti-bootstrap» digo que por más que tire hacia arriba de las cintas de mis zapatos, nunca voy a levitar: primero se me rompen las cintas. Si mi acción es $\mathbf{F}_1$, el principio anti-bootstrap establece que las cintas de mis zapatos *re-accionan* con $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, y así la suma de fuerzas internas es nula. El principio anti-bootstrap se aplica en el análisis de fuerzas de los sistemas sometidos a restricciones (para que las restricciones sean efectivas).

Hemos enunciado los tres axiomas de la mecánica clásica pero nos faltó decir que estos solo son válidos en los llamados *sistemas inerciales*.

En los sistemas no-inerciales la mecánica basada en los tres principios enunciados es muy complicada (hasta misteriosa, diría). Afortunadamente existen otras formulaciones de la mecánica del movimiento que son adecuadas para tratar a los sistemas no-inerciales. Tales formulaciones son presentadas en el libro de Cisneros [7] (de venta en el IF-UASLP a un precio muy accesible y muy recomendable para un curso avanzado de mecánica clásica para los físicos, un matemático está más interesado en uno de sistemas dinámicos).

2.2. Los modelos mecánicos

La elaboración de modelos matemáticos es un deporte que requiere de una cancha donde jugar, jugar, jugar, ..., y seguir jugando.

La cancha de juego es el *marco teórico*, que se establece en base a un conjunto pequeño de hipótesis en las que se establecen *muy claramente* (rigurosa) las relaciones básicas (fundamentales) entre las cantidades por estudiar. Nuestro marco teórico para la mecánica clásica consiste de los tres principios (hipótesis) enunciados en la sección anterior. Las cantidades por estudiar son fuerza, masa, trayectorias, velocidad y aceleración; con ellas se construyen las cantidades apropiadas para cada fenómeno en particular.

A partir de las hipótesis de base (asistidas por otras hipótesis «limitantes», según sea el caso) se demuestran propiedades «generales» de las cantidades por estudiar. Los enunciados (teoremas) que resultan son válidos para todos los modelos que cumplen con las hipótesis.

Este capítulo se dedica a demostrar los enunciados más generales que se siguen de los tres principios básicos de la mecánica (de inercia, acción y anti-bootstrap); los enunciados (teoremas) son aplicables a los modelos mecánicos que vamos a desarrollar en los capítulos que siguen.

Una vez establecido el marco teórico es necesario conocer a profundidad el fenómeno a ser modelado. El objetivo de la *fenomenología* es llegar a definir completamente (y de manera rigurosa) las *variables* (de estado) que evolucionan con el tiempo y los *parámetros* que definen la clase de fenómenos en estudio.

Apoyados en el marco teórico y la fenomenología se enuncian las hipótesis propias al fenómeno que conduzcan a un sistema de ecuaciones que establezcan la dependencia en el tiempo de las variables de estado; aquí empieza lo divertido del juego.

La mayoría de los modelos mecánicos que estudiaremos se establecen como ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), que lo óptimo es llegar a resolver para todas las variables y todos los parámetros. Esto lo podremos hacer en muchos de los ejemplos simples que hemos elegido; pero lo común en las situaciones «reales» (las que no vienen en un libro de texto) es que no podamos resolver de manera «cerrada» las ecuaciones del modelo.

Para las ecuaciones que no se pueden resolver de manera cerrada existen métodos de *análisis cualitativo* (geométricos, topológicos y algebraicos) y métodos *numéricos* (cálculos y simulaciones en una computadora).

En la elaboración de modelos lo recomendable es empezar probando con el más simple que logre atrapar una cierta esencia del fenómeno. Estos modelos de juguete tienen un gran valor teórico. Muchos modelos mecánicos simples tienen comportamientos azarosos (no-integrables) pero que no caen en la definición rigurosa del caos dinámico. Modelos mecánicos de construcción simple y que no son ergódicos, sin estabilidad a la KAM, sin divergencia exponencial de las trayectorias; son

modelos sencillos sin muchas de las cosas típicas del caos y que sin embargo tienen dinámicas azarosas con estructuras (multifractales) en el espacio y en el tiempo.[1, Chap. 15]

La dinámica azarosa en modelos mecánicos es un campo poco estudiado.[21] Modelos ejemplo son el electrón que es «pateado» al cruzar el gap entre las D's en su órbita ciclotrónica (cuando el primer ciclotrón en Berkeley), el rotador pateado y su análogo el oscilador pateado (o martillado) periódicamente.

2.3. Los sistemas de referencia inerciales

Los objetos en un sistema inercial no sufren la acción de las llamadas «fuerzas ficticias»; que actúan por sí mismas, sin necesidad de un agente externo: son fuerzas que se dejan sentir como parte de la dinámica.

Nuestra Tierra al girar no es un sistema inercial. En la Tierra nos vemos sometidos a una fuerza ficticia, llamada de *Coreolis*, que (por ser muy débil) es imperceptible para nosotros pero que hace que los huracanes (en el mar Caribe o en el Golfo) siempre giren en sentido contrario a las manecillas del reloj (cuando se ven desde el espacio). El péndulo de Foucault confirma lo que dijo Galileo: «...y sin embargo se mueve». En el CIACyT de la UASLP hay un péndulo de Foucault.

El interior de un coche que frena no es un sistema inercial, sentimos un jalón hacia el frente. La estación espacial internacional, que se mueve siguiendo una geodésica, es una buena aproximación a un sistema inercial: un objeto suspendido al interior de la estación (colocado con velocidad cero) se mantiene suspendido (sigue con velocidad cero): solo una acción cambia su condición de reposo.

Para continuar con la teoría, supondremos que existe un sistema inercial (el de base, cualquiera que este sea) en el que son válidos los axiomas mecánicos y admitimos que cualquier otro sistema que se mueve a una velocidad constante (incluida la velocidad cero) con respecto al de base es un sistema inercial: los axiomas mecánicos siguen siendo validos en estos sistemas, los inerciales. Las reglas de transformación entre sistemas inerciales son llamadas transformaciones de Galileo.

En la figura 2.1 se esquematizan los sistemas de referencia $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ usados para describir la trayectoria de la partícula P

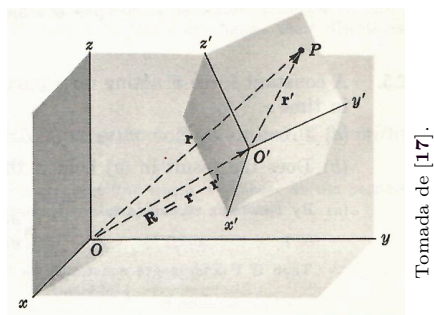


Figura 2.1

bajo la acción de una fuerza. La trayectoria que sigue P en $\mathcal{O}$ es $\mathbf{r}(t)$ y en $\mathcal{O}'$ la *misma* trayectoria es descrita por $\mathbf{r}'(t)$. Las coordenadas de los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son muy diferentes. El observador en $\mathcal{O}$ ve que el origen del sistema $\mathcal{O}'$ se mueve siguiendo la trayectoria $\mathbf{R}(t)$.

Suponemos que $\mathcal{O}$ es inercial y que es válido el principio de acción

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (2.2)$$

siendo m la masa de la partícula P y $\mathbf{F}$ la fuerza que actúa sobre P tal y como se observa en $\mathcal{O}$.

Suponemos que el sistema $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad $\dot{\mathbf{R}}$ constante respecto de $\mathcal{O}$ y así que $\mathcal{O}'$ también es un sistema inercial en el que es válido el principio de acción

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}', \quad (2.3)$$

siendo $\mathbf{F}'$ la *misma* fuerza que actúa sobre P pero tal y como se observa en $\mathcal{O}'$.

2.1. *La fuerza es invariante ante las transformaciones de sistema inercial, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.*

Para demostrar el enunciado restamos las ecuaciones (2.2) y (2.3) para obtener que

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - \mathbf{F}' \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} - \mathbf{F}' = 0$$

pues la velocidad $\dot{\mathbf{R}}$ es una constante y entonces $d^2 \mathbf{R}/dt^2 = 0$.

El enunciado formal 2.1 significa que dos observadores ven la misma fuerza actuando sobre una partícula si, y solo si, ellos se mueven uno respecto a otro con velocidad constante (incluida la velocidad cero).

2.4. Campos de fuerza

Vivimos sobre la superficie de la Tierra inmersos en un campo de fuerzas de gravedad (o gravidez).² A donde quiera que vamos sentimos una fuerza que nos baja hacia el suelo: en cada punto de la biosfera (la región donde vivimos) hay un vector de fuerza en dirección normal hacia el suelo y a eso lo llamamos gravidez: todos los objetos tienen un *peso*, en cualquier lugar en que se encuentren. El modelo matemático para el campo de gravidez es el campo vectorial.[13]

Para la mecánica los campos vectoriales se definen sobre una región $\mathcal{B}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ -euclidiano mediante una función $\mathbf{F}$, que en cada punto $\mathbf{r}$ (de la región $\mathcal{B}$ del espacio, la biosfera por ejemplo) pone un vector de fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, tomado de un espacio $\mathbb{R}^3$ de vectores de fuerza, que no es el $\mathbb{R}^3$ -euclidiano que modela al espacio en el que se mueven los objetos. Los espacios de salida y llegada de la función que define al campo vectorial $\mathbf{F} : \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos espacios diferentes (aunque tengan el mismo nombre, $\mathbb{R}^3$).

Ejemplo 2.1.

El agua que fluye por una manguera se modela por un campo vectorial que a cada punto en el interior de la manguera le asigna un vector de flujo. $\square$

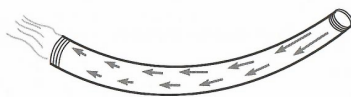


Imagen tomada de [13].

Ejemplo 2.2. Un *campo de fuerza constante* asigna un mismo vector a todos los puntos. La gravidez en nuestro entorno (la región $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ comprendida dentro de un radio de unos pocos kilómetros) se modela por el campo de fuerza constante

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -W\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3.$$

2. La palabra *gravidez* significa «cualidad de pesado».

La magnitud W se determina de la observación experimental (comunicada por Galileo) de que todos los cuerpos en la región $\mathcal{E}$, sin importar su masa, adquieren la misma aceleración constante $g \approx 980 \text{ cm/s}^2$ (este valor cambia muy ligeramente con la altura y la latitud). Para una partícula de masa m la magnitud de $\mathbf{F}$ es dada por el principio de acción como $W = mg$, con buena aproximación la misma en cualquier punto de $\mathcal{E}$. La cantidad $W = mg$ es el *peso* de la partícula de masa m : el peso es el que nos jala hacia abajo (la masa está en nosotros). $\square$

La ecuación de movimiento (el principio de acción) para una partícula de masa m en el campo de fuerza constante del ejemplo anterior es

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mg\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{E}, \quad (2.4)$$

que es la aproximación de una Tierra plana.

En la ecuación (2.4) la masa inercial aparece a la izquierda y a la derecha aparece la *masa gravitacional*, la responsable de que los cuerpos sean pesados (ver el ejemplo 2.2). Calladamente hemos supuesto que las dos masas son iguales y entonces pueden ser eliminadas en la ecuación (2.4), resultando en una ecuación de movimiento que es válida para todas las partículas,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{E}, \quad (2.5)$$

independientemente de la masa que puedan tener.

La predicción (2.5) es que en la región $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$, donde la aproximación de Tierra plana es buena, todas las partículas se mueven de la misma manera, sin importar que tengan masas diferentes; es por esto que la frecuencia de oscilación de un péndulo no depende de la masa que pende de la cuerda, solo depende de la longitud de la cuerda.

Cuenta la leyenda que Galileo experimentó en la torre inclinada de Pisa (en Italia) y aportó la primera evidencia de que la masa inercial y la masa gravitacional son iguales.

2.5. El campo gradiente

Hay situaciones en las que un campo escalar produce un campo vectorial, llamado campo gradiente. El *campo escalar* es una

función real $V : \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto $\mathbf{r}$ de una región $\mathcal{B}$ del espacio le asigna un valor real.

Ejemplo 2.3.



En la figura de arriba el extremo de una barra de metal es calentada por una llama y al interior de la barra metálica (la región $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$) se produce un campo de temperatura $T(\mathbf{r})$ que decrece a lo largo de una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ que avanza del extremo que está sobre la llama al extremo del que es sostenida la barra: $T(\mathbf{r}(t))$ es monótona decreciente como una función de t (con derivada siempre negativa).

A consecuencia del campo de temperatura se produce un flujo de calor en $\mathcal{B}$ que es (el negativo) del campo gradiente del campo escalar $T(\mathbf{r})$: el calor fluye siguiendo el camino en que más rápidamente baja la temperatura en la región $\mathcal{B}$ (por esto es el negativo, porque va de más caliente a menos caliente). Las líneas de flujo son las curvas integrales del campo vectorial. El ejemplo pretende ilustrar cómo un campo escalar genera un campo vectorial y este, a su vez, genera líneas de flujo. $\square$

A la izquierda de la figura 2.2 se muestra la gráfica de un campo vectorial y a la derecha se grafica una de sus curvas integrales. El campo tiene al origen como punto *atractor*, pues todas las curvas integrales fluyen hacia al origen.

Ejemplo 2.4. En una colina rocosa el agua fluye siguiendo el camino que baja más rápidamente. El flujo de agua es el negativo del campo gradiente de la altura $h(x, y)$, que es determinado por la forma de la colina. Si nos movemos por una curva de nivel $h(x, y) = \text{constante}$, la altura no cambia. Si nos movemos en dirección normal a una curva de nivel la altura cambia lo más rápidamente que es posible en el punto en que estamos (localmente). La pendiente en un punto de la colina (la derivada del campo escalar $h(x, y)$) es una función de la dirección

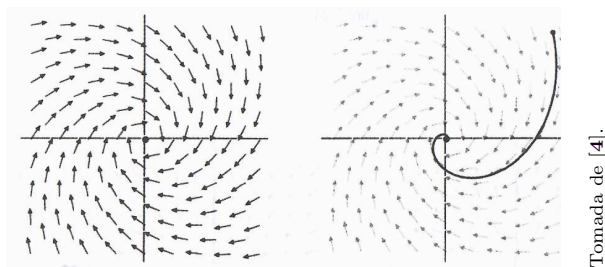


Figura 2.2

que tomemos en ese punto: la derivada es una función vectorial sobre la colina. $\square$

Un campo escalar importante en mecánica es el *potencial escalar* $\mathbf{r} \mapsto V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$, para puntos $\mathbf{r}$ en una cierta región $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Nos referiremos a $V(\mathbf{r})$ simplemente como *el potencial*.

Al seguir una trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en $\mathcal{B}$, los valores del potencial varían localmente a un ritmo dado por la derivada (siguiendo la regla de la cadena)

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{r}(t)) = \partial_x V \frac{dx}{dt} + \partial_y V \frac{dy}{dt} + \partial_z V \frac{dz}{dt},$$

donde reconocemos las coordenadas del vector de velocidad $\dot{\mathbf{v}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^t$ y el *campo gradiente* del potencial V se define como el vector ∇V que tiene como coordenadas las derivadas parciales de V ,

$$\nabla V(\mathbf{r}) = (\partial_x V(\mathbf{r}), \partial_y V(\mathbf{r}), \partial_z V(\mathbf{r}))^t.$$

Con esta definición la derivada del potencial al seguir la ruta $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es el producto escalar

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{r}(t)) = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{r}} = \|\nabla V\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \cos \theta, \quad (2.6)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores ∇V y $\dot{\mathbf{r}}$, que coinciden en el punto $\mathbf{r}(t)$: la derivada de V depende de la dirección de $\dot{\mathbf{r}}$ definida por θ . El mayor ritmo de cambio (positivo: de menos a más) de $V(\mathbf{r}(t))$ es en la dirección con $\cos \theta = 1$, que ocurre cuando la trayectoria avanza con velocidad $\dot{\mathbf{r}}(t)$ que es paralela al vector gradiente $\nabla V(\mathbf{r})$, por lo que el campo gradiente fluye perpendicularmente a las superficies de nivel $V(\mathbf{r}) = \text{una}$

constante, que es la dirección de cambio más rápido. El campo gradiente es el flujo con el ritmo de cambio máximo.

Al ser el vector de velocidad $\dot{\mathbf{v}}$ colineal al vector tangente $\mathbf{T}$ de la trayectoria en el punto $\mathbf{r}$, concluimos lo siguiente

2.2. *Las trayectorias con el ritmo de cambio máximo de V son las curvas integrales del campo gradiente, ∇V .*

En mecánica el campo escalar $V(\mathbf{r})$ es una forma de *energía potencial* (energía guardada pero pronta a ser liberada, por eso es potencial) que genera el campo gradiente de fuerza

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}).$$

El campo de fuerza gradiente es el flujo con el ritmo de reducción de la energía potencial que es máximo: una trayectoria gradiente es el camino para bajar la energía potencial lo más rápidamente.

Ejemplo 2.5. En la región $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ de la biosfera donde la aproximación de Tierra plana es buena, el campo de fuerza de gravedad es constante

$$\mathbf{F} = -mg \mathbf{k},$$

el mismo en todos los puntos de $\mathcal{E}$. Este es un campo gradiente que deriva del potencial

$$V(\mathbf{r}) = mgz + c \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = -\nabla V,$$

siendo c una constante arbitraria, lo que permite ubicar el origen de coordenadas $\mathcal{O}$ a cualquier altura z_0 , escogiendo la constante c de manera a tener que

$$V(\mathbf{r}) = mg(z - z_0). \quad (2.7)$$

Veremos que lo importante son las diferencias de potencial. $\square$

Ejemplo 2.6. Cuando subimos cargando un ladrillo por la escalera hasta la azotea y lo dejamos al borde del pretil, hemos hecho un trabajo que se convirtió en energía potencial guardada en el ladrillo. Mientras el ladrillo siga en el pretil (per saecula saeculorum), la energía seguirá ahí guardada. La energía se liberará en el momento que empujemos al ladrillo para que salga del pretil y caiga a golpear el suelo siguiendo una trayectoria gradiente: la energía potencial baja y la cinética sube (el ladrillo agarra vuelo al ir cayendo). $\square$

2.6. Trabajo y energía

Una cantidad que «mide» el efecto acumulado por la acción de una fuerza a lo largo de un trayecto es el trabajo. Una fuerza $\mathbf{F}$ ejerce el *trabajo*

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

cuando actúa sobre una partícula a lo largo del desplazamiento $d\mathbf{r}$ (que ocurre en el lapso de tiempo dt).

En la definición de trabajo interviene el producto escalar pues solo la componente de la fuerza $\mathbf{F}$ en la dirección del desplazamiento $d\mathbf{r}$ es la que hace trabajo.

El trabajo acumulado a lo largo de una trayectoria que empieza en el punto P_1 y termina en el punto P_2 es la integral

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

a lo largo de la trayectoria recorrida.

La trayectoria de P_1 a P_2 en la integral de trabajo puede realizarse (físicamente) mediante cualquier mecanismo. Pero para la trayectoria de una partícula que, desde el punto de partida P_1 al punto de llegada P_2 , satisface el principio de acción (2.1) la integral de trabajo puede calcularse integrando la aceleración

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}m \int_{t_0}^T \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) dt \\ &= \frac{1}{2}mv^2(T) - \frac{1}{2}mv^2(t_0) = T_f - T_i, \end{aligned}$$

donde $T = (1/2)mv^2$ es la energía cinética. El resultado anterior es importante y solo es válido para trayectorias en las que se satisface el principio de acción.

2.3. *El trabajo W hecho por un campo de fuerza sobre una partícula que sigue una trayectoria que en todo punto satisface el principio de acción (2.1) es la energía cinética final menos la energía cinética inicial,*

$$W = T_f - T_i.$$

La partícula gana (o pierde, en caso de que $W < 0$) energía cinética debido al trabajo hecho por la fuerza que actúa sobre de ella.

Cuando la partícula se mueve en un campo gradiente, la integral de trabajo puede calcularse para cualquier trayectoria, no importa que no satisfaga el principio de acción (2.1); como en el ejemplo 2.6 que se lleva un ladrillo a la azotea subiendo una escalera.

Haciendo la sustitución $\mathbf{F} = -\nabla V$ en la integral de trabajo (teniendo en cuenta la identidad en (2.6))

$$\begin{aligned} W &= - \int_{P_1}^{P_2} (\nabla V) \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{P_1}^{P_2} dV \\ &= V(P_1) - V(P_2), \end{aligned}$$

sin importar cual sea el trayecto que va del punto P_1 al punto P_2 . Este resultado también es importante y lo destacamos como el siguiente enunciado.

2.4. *El trabajo W hecho por un campo gradiente sobre una partícula que sigue una trayectoria del punto P_1 al punto P_2 es la energía potencial inicial menos la energía potencial final,*

$$W = V(P_1) - V(P_2).$$

Para la energía potencial se tiene la situación opuesta a la energía cinética. El trabajo hecho por la fuerza es positivo ($W > 0$) cuando la partícula termina en un punto de potencial menor al potencial del cual empezó. Si en una trayectoria la energía cinética sube la potencial baja, y viceversa.

Por el enunciado 2.4 resulta que si la trayectoria en un campo gradiente es un recorrido cerrado, en el que el punto final P_2 es el mismo que el punto inicial P_1 , entonces el trabajo realizado es cero; sin importar cómo es la trayectoria.

2.5. *El trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria γ cerrada (sin cruzamientos) es cero,*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

si, y solo si, el campo de fuerza es un campo gradiente.

Ejemplo 2.7. El trabajo W hecho al mover una partícula alrededor de un círculo γ de radio $r = 3$, centrado en el origen y sobre el plano x - y en el campo de fuerza

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

es

$$W = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 18\pi$$

por lo que el campo $\mathbf{F}$ no es gradiente y no es conservativo.

DEMOSTRACIÓN. En el plano x - y , $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ así que

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} (2x - y)dx + (x + y)dy.$$

La forma paramétrica del círculo γ es

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Con este cambio de variables se tiene que

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (9 - 9 \sin t \cos t) dt = 18\pi.$$

Los detalles del cálculo se dejan de tarea. □

Para una partícula que sigue una trayectoria que satisface el principio de acción (2.1) en un campo gradiente, los enunciados 2.3 y 2.4 son válidos; por lo que el trabajo calculado de las dos maneras es el mismo,

$$T_f - T_i = V(P_1) - V(P_2) \quad \rightarrow \quad T_f + V(P_2) = T_i + V(P_1) = E,$$

donde $E = T + V$ es la energía total de la partícula en un instante dado.

El punto inicial P_1 (al tiempo t_0) y el punto final P_2 (al tiempo T) de una trayectoria se eligen arbitrariamente por lo que el resultado anterior significa que la energía total de una partícula que sigue una trayectoria que satisface el principio de acción en un campo gradiente es una constante independiente del tiempo, la energía total mantiene el mismo valor en cualquier punto de la trayectoria: la trayectoria se caracteriza por el valor de la energía total. Tenemos el siguiente enunciado.

2.6. *Una partícula que se mueve en un campo gradiente siguiendo el principio de acción (2.1) mantiene constante su energía total $E = (1/2)mv^2(t) + V(\mathbf{r}(t))$, independiente del tiempo.*

Por esto es que a un campo gradiente se le llama un *campo conservativo*, porque una partícula que se mueve en un campo gradiente conserva la misma energía total durante todo el trayecto.

Cuando la energía es una integral primera (otra manera de decir que se conserva), las “superficies” de energía constante en el espacio de fase producen una foliación del espacio que es útil en la integración de las ecuaciones de movimiento. En el caso muy simple de los espacios de fase bidimensionales la foliación es la solución.

2.7. Impulso y momento

Otra medida del efecto que tiene la acción de una fuerza es considerando el lapso de tiempo que dura la acción. Este efecto es el *impulso* generado por la fuerza y para una trayectoria $\mathbf{r}(t)$, que va del punto inicial P_1 a t_0 al punto final P_2 a T , se define por la integral

$$\boldsymbol{\pi} = \int_{t_0}^T \mathbf{F} dt.$$

Si la partícula de masa m se mueve siguiendo el principio de acción (2.1) la integral de impulso se calcula integrando la aceleración

$$\boldsymbol{\pi} = \int_{t_0}^T \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \mathbf{p}(T) - \mathbf{p}(t_0) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \quad (2.8)$$

El impulso $\boldsymbol{\pi}$ es la diferencia en la cantidad de movimiento al final de la trayectoria (en P_2) con respecto a la cantidad de movimiento al inicio (en P_1).

Ejemplo 2.8.



El bat ejerce una gran fuerza sobre la pelota; y aunque el tiempo de acción es muy breve, el impulso «fuerza-tiempo» produce un cambio notable en la velocidad de la pelota. El impulso $\boldsymbol{\pi}$ producido por el bat, en intensidad y dirección, es grande. $\square$

2.7. *El impulso de una fuerza es el cambio de momento producido por su acción durante un cierto tiempo, $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.*

Ejemplo 2.9. Un martillazo dado al bloque de la figura (en la dirección positiva del eje- y , $\mathbf{j}$) en el instante t_0 produce un cambio $\Delta\mathbf{p}$ en su movimiento, que está determinado por el impulso

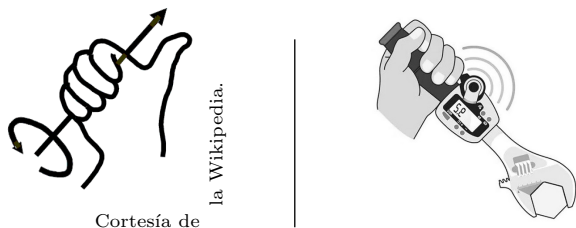


Figura 2.3

el centro produciendo un giro (no produce un desplazamiento), siguiendo la regla de la mano derecha, tal como se muestra al lado izquierdo de la figura 2.3: el dedo gordo apunta en la dirección del vector axial $\mathbf{\Lambda}$ y los otros dedos indican la dirección del giro alrededor del eje.

Ejemplo 2.10. Al lado derecho de la figura 2.3 una mano tira hacia abajo con fuerza una llave ajustable inglesa que funge como palanca para convertir la fuerza de desplazamiento en un torque (una fuerza de giro) que hace girar la cabeza hexagonal del tornillo en el sentido, *por definición*, positivo (contrario al reloj). La «fuerza» de torque actuando en el tornillo es un vector axial de giro que se ubica en el centro de la cabeza hexagonal y apuntando hacia la cara del lector. El giro se produce siguiendo la regla (la convención) de la mano derecha, que relaciona el eje con el giro. La regla se muestra a la izquierda de la figura. $\square$

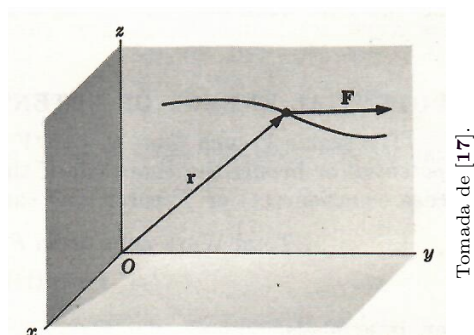
El principio de acción para el torque $\mathbf{\Lambda}$ se deriva del principio de acción (2.1) para $\mathbf{F}$, tomando en cuenta la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

que resulta de que $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ y $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0$. Por lo que el ritmo de cambio en el tiempo del vector axial $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ lo da el torque,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{\Lambda}. \quad (2.9)$$

El vector axial $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ es el momento angular relativo al origen $\mathcal{O}$.



Tomada de [17].

Figura 2.4

En la figura 2.4 se ilustra el sentido físico del momento angular $\mathbf{L}$. La partícula sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ por la acción de una fuerza $\mathbf{F}$. Considerando el vector de posición $\mathbf{r}$ como si fuera un brazo de palanca para $\mathbf{F}$ que generaría la acción axial $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ en $\mathcal{O}$ y que actuaría produciendo el momento angular $\mathbf{L}$, según el principio de acción (2.9). Se le asocia a la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ un momento angular $L(t)$, que es un vector axial ubicado en el origen de coordenadas.

2.9. Constantes del movimiento

En secciones anteriores vimos cómo el principio de acción (2.1) conduce a las nociones de energía (por la acción de $\mathbf{F}$ como trabajo), momento (por la acción de $\mathbf{F}$ como impulso) y momento angular (por la acción de $\mathbf{F}$ como torque). Bajo condiciones especiales estas características del movimiento se mantienen constantes y se les llama «leyes de conservación».

Ya en el enunciado 2.6 nos encontramos una primera ley de conservación, estableciendo que a lo largo de cualquier órbita que es guiada por la acción de un campo de fuerza gradiente la energía total $E = T + V$ se mantiene constante; por lo que puede considerarse como una característica del movimiento a la energía total E . El enunciado 2.6 es un ejemplo de la ley general de conservación de la energía.

Ejemplo 2.11. Un carro se desliza por una montaña rusa, que tiene un trayecto de forma dada por la función $h(x)$. Por lo dicho en el ejemplo 2.5, la energía potencial del carro en el punto

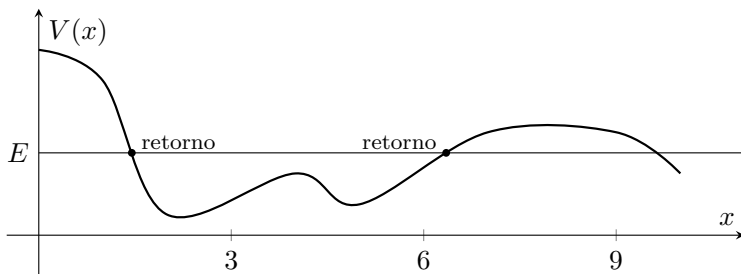


Figura 2.5

x es $V(x) = mgh(x)$ y se grafica en azul en la figura 2.5. El carro (corriendo sin fricción) va bajando y subiendo, modificando su energía potencial y su energía cinética $T(x) = (1/2)mv(x)^2$, de manera que la energía total $E = T + V$, es una constante independiente de la posición x del carro. Un valor de la energía total E se indica por la línea horizontal en color negro en la figura 2.5. La magnitud de la velocidad ($v = \|\mathbf{v}\| \geq 0$) del carro en el punto x es

$$v(x) = \left(\frac{2}{m}(E - mgh(x)) \right)^{1/2}.$$

Los puntos de retorno x_r están dados por la condición $v(x_r) = 0$, los puntos más altos donde el carro para y toda su energía es potencial $E = mgh(x_r)$. $\square$

Muchos ejemplos más de conservación de la energía están por venir en los próximos capítulos.

En cuanto a la «ley» de conservación de la cantidad de movimiento $\mathbf{p}$, a partir del principio de acción (2.1) resulta inmediato que si la fuerza es cero, $\mathbf{F} = 0$, la cantidad de movimiento se mantiene constante, pues $\dot{\mathbf{p}} = 0$. Esto también se puede apreciar en la acción por impulso de $\mathbf{F}$, (2.8). Si no hay impulso, $\boldsymbol{\pi} = 0$, no hay cambio en el momento.

Ejemplo 2.12. El principio de acción establecido en (2.5) para una partícula moviéndose en el campo de gravedad (en la aproximación de Tierra plana),

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{k},$$

tiene una fuerza vertical, $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$, con componente horizontal cero, por lo que la componente horizontal de la aceleración es cero también, resultando en que la componente horizontal del momento ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) se mantiene constante durante todo el trayecto. La acción del peso solo influye en la componente vertical del momento $\mathbf{p}$.

También hay una «ley» de conservación del momento angular. Cuando el torque ejercido por una fuerza es cero, $\mathbf{\Lambda} = 0$, el principio de acción angular (2.9) implica que el momento angular $\mathbf{L}$ se mantiene constante. Ejemplos de la conservación del momento angular surgirán al tratar el movimiento planetario.

Ejemplo 2.13. Una partícula que se mueve en la trayectoria elíptica

$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j} \quad (2.10)$$

tiene momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = mab\omega \mathbf{k}$$

que es constante (independiente del tiempo), y por el principio de acción angular (2.9) la fuerza $\mathbf{F}$ que mueve a la partícula no produce torque

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0,$$

y entonces $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$. Esto lo confirmamos calculando la aceleración $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$ y aplicando luego el principio de acción $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -m\omega^2 \mathbf{r}$, esto es que $c = -m\omega^2$.

La aceleración $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$ apunta al origen de coordenadas en todo tiempo, así que tiene una componente centrípeta dominante. Un buen ejercicio es calcular el sistema local de coordenadas ($\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$) para la trayectoria elíptica (2.10). $\square$

2.10. Ejercicios

2.3. (a). Verificar que el lugar geométrico de la trayectoria (2.10) es una elipse (eliminando el parámetro t). (b). Calcular el sistema de vectores unitarios ($\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$). (c). Discutir el sentido geométrico del vector axial binormal $\mathbf{B}$.

Capítulo 3

Mecánica en la Tierra plana

La aproximación de Tierra plana es buena en una región $\mathcal{E}$ de la biosfera de varias decenas de kilómetros de diámetro. Ejemplos de movimientos en $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ que son simples de describir en la teoría son los siguientes.

1. Dejar caer una piedra desde la terraza del cuarto piso (el piso de las matemáticas en el IF-UASLP).
2. Bolas de golf o pelotas de beis que van volando, buscando dar en el hoyo o volarse la barda. Quienes aman lanzar bombas llaman «balísticas» a esas trayectorias.
3. Movimientos que están restringidos a seguir una trayectoria como un carrito en la montaña rusa, una canica que se mece colgando de un hilo, o bajar (un niño) deslizándose en una resbaladilla.
4. Arrastrar una caja sobre el piso y vencer la fuerza de fricción de la caja contra el piso. Los efectos en general de la fuerza de fricción en los movimientos restringidos.
5. Tirarse en paracaídas desde la altura de una avioneta.

3.1. Movimiento libre

La trayectoria de una partícula moviéndose sin otra influencia que la fuerza de gravedad es solución de la ecuación de movimiento (2.5) del capítulo anterior (en la página 21), sin importar la masa (todo se reduce a geometría),

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Integrando una primera vez

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x}, \quad v_y = v_{0y}, \quad v_z = -gt + v_{0z} \\ \rightarrow \quad \mathbf{v} &= -gt\mathbf{k} + \mathbf{v}_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde las tres constantes de integración se agrupan en el vector $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})^t$ que es la velocidad inicial, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, al tiempo $t = 0$.

Integrando una segunda vez la ecuación anterior

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{v}_0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -gt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

se obtienen las coordenadas de la trayectoria

$$x = v_{0x}t + x_0, \quad y = v_{0y}t + y_0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0$$

que se agrupan en forma vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} \quad (3.2)$$

de igual manera, las tres constantes de integración constituyen el vector $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$, que es la posición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, al tiempo $t = 0$.

Para determinar la solución (3.2) por completo es necesario especificar una posición $\mathbf{r}_0$ y una velocidad $\mathbf{v}_0$ iniciales; la aceleración es $g = 980 \text{ cm/s}^2$. Analizaremos con algún detalle varias situaciones particulares de (3.2) y (3.1) en las secciones que siguen.

3.2. Conservación de la energía

El campo gravitacional en la Tierra plana es un campo gradiente con una energía potencial que, vimos en el ejemplo 2.5, solo depende de la coordenada z del vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ según la fórmula en (2.7) (en la página 24), en la que se escogió el punto de partida $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$ como el cero de la energía potencial. Reproducimos aquí la fórmula para tenerla a la mano,

$$V(\mathbf{r}) = mg(z - z_0) \quad \rightarrow \quad V(\mathbf{r}_0) = 0. \quad (3.3)$$

Por el enunciado 2.6, en un campo gradiente la energía total $E = T + V$ se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria. Las soluciones (3.1) y (3.2) a la ecuación de movimiento (2.5) al ser sustituidas en la energía total

$$E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t)),$$

por el enunciado 2.6, la dependencia en el parámetro tiempo t se cancela. Decimos que si la energía cinética sube, la potencial baja (y viceversa) a modo de mantener E constante.

3.3. Piedras en caída libre

El experimento más simple es extender el brazo hacia afuera de la terraza del cuarto piso de matemáticas y dejar caer una piedra (que aquí en el cerro sobran, pero sería mejor hacerlo con un globo lleno de agua).

Conviene colocar el origen del sistema de referencia en la posición inicial de la piedra y de ahí dejar caer la piedra sin darle impulso adicional (nomás abrir la mano para dejarla caer). Esto determina las condiciones iniciales a

$$\mathbf{r}_0 = 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_0 = 0$$

y (3.2) se reduce a movimiento a lo largo del eje z (caída vertical),

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} = -\frac{1}{2}gt^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para las coordenadas de $\mathbf{r}$ se tiene que

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{y} \quad z = -\frac{1}{2}gt^2;$$

el signo menos es porque la piedra va de bajada. La pregunta es cuánto tiempo le lleva a la piedra caer y golpear contra el suelo, suponiendo que la altura es de 10 m = 1000 cm (el suelo lo vemos hacia abajo en $z = -10$ m). Despejando, encontramos que no tarda mucho en golpear el suelo,

$$t = \sqrt{2|z|/g} = \sqrt{2000/980} \approx 1.4\text{s},$$

casi un segundo y medio; el mismo tiempo para todas las piedras, sean grandes o chicas, la masa no importa.

La otra pregunta es con qué velocidad llega la piedra al suelo. De la solución (3.1) tenemos que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -gt\mathbf{k} = -gt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para las coordenadas la solución es

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = -gt \approx -980[\text{cm/s}^2] \times 1.4[\text{s}],$$

(de nuevo) el signo menos es porque la piedra va de bajada. La magnitud de la velocidad con que llega al suelo es

$$v \approx 1381 \text{ cm/s} = 13.81 \text{ m/s}.$$

Aunque la velocidad de impacto es la misma para todas las piedras, la energía con la que impacta el suelo una piedra si depende de la masa, $T = \frac{1}{2}mv^2$. El golpe de una piedra grande duele más que el golpe de una piedra chica, impactando las dos con la misma velocidad.

3.4. Un solitario de pelota

El juego ahora es lanzar una pelota verticalmente hacia arriba y recibirla en las manos (cacharla) de regreso. Conviene poner el origen del sistema de referencia en el punto desde el cual lanzamos a la pelota; las condiciones iniciales en las soluciones (3.2) y (3.1) para el solitario de pelota son

$$\mathbf{r}_0 = 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{k} = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $v_0 > 0$.

Con las condiciones iniciales establecidas, la ecuación para la velocidad (3.1) resulta en la siguiente ecuación de movimiento,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -gt\mathbf{k} + v_0\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt + v_0 \end{pmatrix}.$$

Para las coordenadas se tienen tres ecuaciones

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{y} \quad v_z = -gt + v_0.$$

Las primeras dos ecuaciones dicen que el movimiento es vertical y la tercera dice que el movimiento es hacia arriba en tanto que $v_z > 0$. El punto de retorno, la altura máxima que alcanza la pelota, ocurre en el tiempo t_r , el momento en que la pelota se detiene: $v_z(t_r) = 0$, esto es

$$v_z(t_r) = -gt_r + v_0 = 0 \quad \rightarrow \quad t_r = \frac{v_0}{g} = \frac{\text{cm/s}}{\text{cm/s}^2} = \text{s}.$$

Ahora para la trayectoria, la ecuación (3.2) con las condiciones iniciales para el juego da la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_0 t \mathbf{k} - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

que corresponde a tres ecuaciones para las coordenadas,

$$x = 0, \quad y = 0 \quad y \quad z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

La altura máxima la alcanza la pelota al tiempo $t_r = v_0/g$,

$$z_{max} = z(t_r) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = \frac{\text{cm}^2/\text{s}^2}{\text{cm}/\text{s}^2} = \text{cm}.$$

Este resultado refleja la conservación de la energía establecida en el enunciado 2.6, que dice que la energía total es la misma en cualquier punto de la trayectoria. Al momento de lanzar la pelota toda su energía es cinética, $E = \frac{1}{2} m v_0^2$; al llegar el punto más alto con velocidad cero, toda su energía es potencial, $E = m g z_{max}$. Por el enunciado 2.6, estas dos energías son iguales.

Así que la siguiente pregunta que me hago es a qué velocidad tengo que lanzar la pelota para alcanzar una altura $z_{max} = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$. Despejando v_0 obtenemos la respuesta

$$v_0 = \sqrt{2 g z_{max}} = \sqrt{2 \times 980 \times 500} \approx 990 \text{ cm/s} = 9.9 \text{ m/s},$$

sin importar el peso de la pelota, con esta velocidad de lanzamiento llega a los 5 m. Por supuesto que el impulso, en la fórmula (2.8) (en la página 28), depende de la masa; así que tenemos que ejercer una fuerza mayor cuando una pelota es más pesada que otra para lanzarlas con la misma velocidad v_0 .

Otra pregunta más que nos hacemos es cuánto tiempo le toma a la pelota ir y venir. Al tiempo $t_r = v_0/g$ en el que alcanza la altura máxima z_{max} hay que añadirle el tiempo que le toma descender desde z_{max} a nuestras manos ($z = 0$).

El regreso de la pelota es en caída libre, como lo hacen las piedras de la sección anterior (lo bueno es que las ecuaciones son independientes de la masa). Así que el tiempo de caída desde z_{max} a mis manos es

$$t_c = \sqrt{\frac{2}{g} z_{max}} = \sqrt{\frac{2}{g} \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}} = \frac{v_0}{g},$$

que resulta ser el mismo tiempo que le toma en subir. El tiempo de ida y retorno es

$$T = t_r + t_c = 2\frac{v_0}{g} \approx 2 \text{ s.}$$

Por último, quiero saber con que velocidad regresa la pelota a mis manos. La fórmula de caída libre nos da la velocidad final para la coordenada v_z ,

$$v_{fz} = -gt_c = -g\frac{v_0}{g} = -v_0,$$

que es la misma velocidad de lanzamiento, pero de bajada (con el signo menos). Este resultado es también un reflejo del enunciado 2.6 de conservación de la energía en un campo gradiente.

3.5. Jugando pelota con una compañera

Jugando con una compañera se puede lanzar la pelota hacia el frente y no solo verticalmente hacia arriba como en el solitario. En este juego las condiciones iniciales para las soluciones (3.2) y (3.1) son

$$\mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \mathbf{j} + v_0 \sin \theta \mathbf{k},$$

donde $\mathbf{r}_0$ es el punto desde el que se hace el lanzamiento, que se escoge como el origen del sistema de referencia (por eso es cero) y $\mathbf{v}_0$ es la velocidad con la que se hace el lanzamiento, que va dirigido en la dirección del eje- y , con un ángulo $\theta \in (0, \pi/2)$ de inclinación hacia arriba y con una magnitud $v_0 = \|\mathbf{v}_0\| > 0$.

Con estas condiciones iniciales la velocidad (3.1) para el trayecto de la pelota lanzada es

$$\mathbf{v}(t) = v_0(\cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}) - gt \mathbf{k}$$

que para las tres coordenadas es

$$v_x(t) = 0, \quad v_y(t) = v_0 \cos \theta \quad \text{y} \quad v_z(t) = v_0 \sin \theta - gt.$$

La primera ecuación nos dice que el trayecto del lanzamiento está sobre el plano y - z ($x = 0$); la segunda nos dice que la velocidad en la dirección hacia adelante (la del eje y) se mantiene constante durante todo el trayecto y la tercera nos dice que la pelota sube mientras $v_z > 0$ (para tiempos pequeños) hasta que

se detiene en la máxima altura z_{max} , en el momento t_r cuando la velocidad hacia arriba es $v_z(t_r) = 0$,

$$v_0 \sin \theta - gt_r = 0 \quad \rightarrow \quad t_r = \frac{v_0}{g} \sin \theta,$$

siendo $z(t_r) = z_{max}$.

La solución para la trayectoria (3.2) con las condiciones iniciales del lanzamiento es

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t (\cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}) - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{k}$$

que para las tres coordenadas de $\mathbf{r}(t)$ da lo siguiente

$$x(t) = 0, \quad y(t) = v_0 t \cos \theta \quad y \quad z(t) = (v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t) t.$$

La primera ecuación nos confirma que la trayectoria se mantiene sobre el plano y - z ($x = 0$), la segunda dice que la pelota en la dirección y avanza a velocidad constante y la tercera es la distancia a la que sube como una función del tiempo. Al tiempo t_r la pelota alcanza la altura máxima; sustituyendo t_r en $z(t)$ se obtiene

$$z(t_r) = z_{max} = \frac{1}{2g} (v_0 \sin \theta)^2.$$

El lanzamiento tiene un *rango* (o *alcance*) que es la distancia R desde el punto de lanzamiento al punto en el eje- y en que la pelota baja a $z = 0$ de nuevo (a la altura del lanzamiento). El tiempo t_R en que esto ocurre es cuando $z(t_R) = 0$,

$$(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_R) t_R = 0 \quad \rightarrow \quad t_R = \frac{2}{g} v_0 \sin \theta.$$

Para obtener R sustituimos t_R en $y(t)$,

$$R = y(t_R) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (3.4)$$

El rango depende del doble del ángulo de lanzamiento, por lo que el alcance máximo de un lanzamiento con velocidad v_0 es cuando $\sin 2\theta = 1$, que se logra con un ángulo $\theta = 45^\circ$. Si la queremos llegar lejos (aunque no sea muy rápido) lo mejor es lanzar a 45° .

La trayectoria $\mathbf{r}(t)$ sube y baja y tiene un alcance R . El lugar geométrico de la trayectoria es una parábola. Para confirmarlo, eliminamos el parámetro t de las ecuaciones para $y(t)$

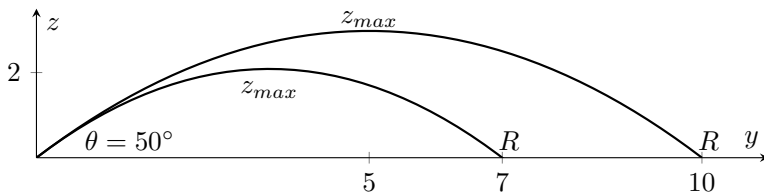


Figura 3.1

y $z(t)$. De $y(t)$ despejamos t

$$y = v_0 t \cos \theta \quad \rightarrow \quad t = \frac{y}{v_0 \cos \theta}$$

para sustituirla en $z(t)$,

$$z = \frac{y}{v_0 \cos \theta} \left(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g \frac{y}{v_0 \cos \theta} \right).$$

Solo nos queda remplazar en la fórmula anterior la velocidad inicial v_0 en función de R usando (3.4) para obtener

$$z = \frac{\tan \theta}{R} y (R - y),$$

que es la ecuación de una parábola. La pendiente de la trayectoria parabólica en el punto de lanzamiento, el punto $y = 0$, es

$$z'(0) = \tan \theta.$$

En la figura 4.7 se grafican las parábolas correspondientes a dos lanzamientos con un ángulo de $\theta = 50^\circ$ (el mismo para los dos) y con las velocidades v_0 necesarias para tener rangos de $R = 7\text{m}$ y $R = 10\text{m}$, respectivamente. En las dos trayectorias la pelota sobrepasa ligeramente los 2m de altura y el punto z_{max} se ubica en el punto medio del rango R , lo cual se confirma en el siguiente cálculo,

$$y_{max} = y(t_r) = \frac{v_0}{g} \sin \theta v_0 \cos \theta = \frac{1}{2} R.$$

3.6. La resbaladilla recta

Hay movimientos en la Tierra plana que, a diferencia de los lanzamientos de pelota, no son libres y en ellos se restringe a la partícula a moverse a lo largo de una trayectoria preestablecida, como el carrito de una montaña rusa, que nunca se sale

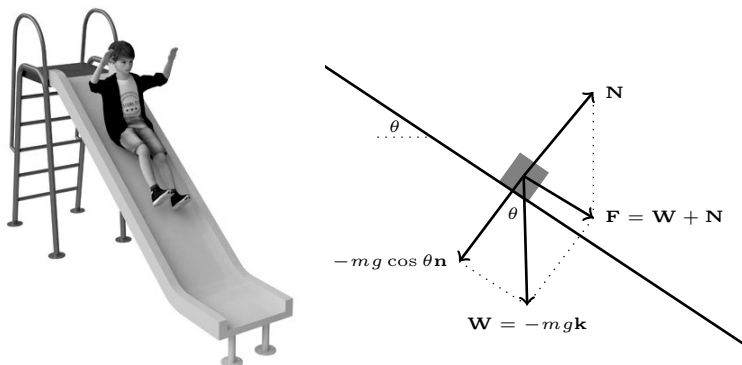


Figura 3.2

del riel. Para escribir la(s) ecuación(es) de un movimiento restringido es necesario un análisis previo de la manera en que se «entrelazan» (se componen) las *fuerzas de restricción* (las que imponen condiciones) y las fuerzas de acción (las que producen el movimiento).

El análisis de fuerzas sobre el carrito de la montaña rusa (de trayectoria arbitraria, como en la figura 2.5 de la página 32) conduce a ecuaciones de movimiento difíciles de resolver, pues la pendiente del recorrido es una función arbitraria de la trayectoria y por tanto del tiempo.

El caso más simple (pero no trivial) de montaña rusa es la resbaladilla que se muestra en la figura 3.2. La resbaladilla es recta y mantiene una pendiente constante. Las ecuaciones de movimiento que resultan del principio de acción para la resbaladilla son simples de integrar.

A la derecha de la figura 3.2 se hace el análisis de fuerzas para la resbaladilla, donde el niño se modela por un cubito de masa m y se supone que la componente centrípeta de la aceleración es cero (pues la resbaladilla es recta).

Con referencia a la figura 3.2, el peso del cubito $\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$ ejerce una presión normal $\mathbf{P} = -mg \cos \theta \mathbf{n}$ sobre la resbaladilla, donde el vector unitario $\mathbf{n} = \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k}$ es normal a la resbaladilla y el ángulo de la pendiente es θ . Por el principio anti-bootstrap, la resbaladilla ejerce la fuerza de reacción (igual y en sentido contrario) $\mathbf{N} = mg \cos \theta \mathbf{n}$, de modo que la fuerza

total sobre el cubito es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{W} + \mathbf{N} = mg \sin \theta \cos \theta \mathbf{i} - mg \sin^2 \theta \mathbf{k} \\ &= mg \sin \theta (\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{k}) = mg \sin \theta \mathbf{T},\end{aligned}$$

donde el vector unitario $\mathbf{T}$ va en dirección paralela a la resbaladilla. Aquí la fuerza normal $\mathbf{N}$ es la fuerza de restricción que mantiene al cuerpo sobre la resbaladilla.

El principio de acción da, para la fuerza total $\mathbf{F}$, la siguiente ecuación de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{z}\mathbf{k}) = \mathbf{F} = mg(\sin \theta \cos \theta \mathbf{i} - \sin^2 \theta \mathbf{k}),$$

en la que se cancelan las masas m y para las coordenadas se tienen las ecuaciones

$$\ddot{x} = g \sin \theta \cos \theta \quad \text{y} \quad \ddot{z} = -g \sin^2 \theta.$$

Suponiendo que las condiciones iniciales son cero, $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$ y $\mathbf{r}_0 = 0$, las ecuaciones se integran muy fácilmente para obtener

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{y} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \theta.$$

La solución es independiente de m , de igual manera baja por la resbaladilla un niño flaco que un niño gordo.

De ver la figura 3.2, intuimos que debe ser mas simple el resultado para la distancia $s(t)$ recorrida a lo largo de la resbaladilla y en verdad, se obtiene

$$s(t) = \sqrt{x^2(t) + z^2(t)} = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta.$$

Este resultado se obtiene también, de manera más directa, del principio de acción $\ddot{s} = mg \sin \theta$ que nos dice que g se reduce en la resbaladilla a una aceleración «efectiva» por el factor $\sin \theta$, controlado con la pendiente de la resbaladilla. Pero este paso sencillo no funciona cuando la aceleración tiene una componente centrípeta. De esto trata el ejemplo siguiente.

3.7. La resbaladilla esférica

En el polo norte de una esfera centrada en el origen de coordenadas, se asienta (en reposo inestable) una partícula de masa m . Recordar que en la Tierra plana la masa m se vuelve irrelevante en el principio de acción.

Le damos un empujoncito a la partícula en la dirección positiva del eje- x para que baje resbalando sobre de la esfera.

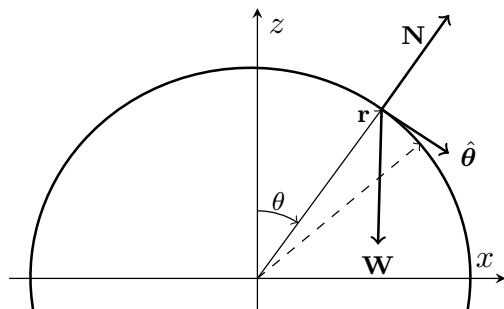


Figura 3.3

La situación se esquematiza en el diagrama de la figura 3.3, que corresponde al momento t en el que la partícula va en la posición $\mathbf{r}$ (para evitar complicaciones innecesarias (para el dibujante: yo), la partícula no se muestra en el esquema). Al seguir resbalando sobre la superficie, llega un punto en el que la partícula se despegue de la esfera, escapa y continúa en caída libre.

Aunque el análisis de fuerzas es similar a la resbaladilla recta, la esférica es ligeramente más complicada que la recta, pues, como se ve en la figure 3.3, la pendiente no se mantiene constante, sino que va creciendo conforme la partícula avanza en la trayectoria y eso implica una componente centrípeta para la aceleración. La resbaladilla esférica es un primer ejemplo en el que la componente centrípeta es relevante para la dinámica.¹

En coordenadas esféricas el *ángulo polar* θ (para localizar un punto en la esfera) se mide desde el eje- z (que va en dirección del poste en el norte, *the north pole*), así que la línea del ecuador queda a un ángulo polar de $\theta = \pi/2$ radianes, que son 90° (recodar que π es equivalente a 180°) y no a 0° como en las cartografías. El ángulo polar de las coordenadas esféricas no es una medida directa de la pendiente de la trayectoria (referirse a las figuras 3.3 y 3.2).

1. Como juego infantil, una resbaladilla esférica pudiera ser más divertida para los niños que la resbaladilla recta.

Al tiempo t la partícula se ubica sobre la esfera a una distancia radial r y a un ángulo polar θ . Ahí, el peso de la partícula es

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{k} = -mg(\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

siendo $\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{k}$ un vector unitario en la dirección radial y el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{k}$ es ortogonal a $\hat{\mathbf{r}}$, unitario y en la dirección del ángulo polar θ . La fuerza de restricción $\mathbf{N}$ sabemos que es normal a la esfera $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{r}}$, pero desconocemos su magnitud $N \geq 0$. La ubicación de todos estos vectores se detalla en el esquema de la figura 3.3.

A diferencia de la resbaladilla recta, la esférica tiene un radio finito de curvatura (r , de hecho) lo cual implica una acción centrípeta que hace que la magnitud N de la fuerza de restricción sea una variable dinámica no constante. Es conveniente revisar lo dicho en la sección 1.8 en la página 9.

La fuerza total sobre la partícula es la suma de fuerzas

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{N} = N\hat{\mathbf{r}} - mg\mathbf{k} = (N - mg\cos\theta)\hat{\mathbf{r}} + mg\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Para aplicar el principio de acción, observamos que $d\mathbf{r} = r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$, por lo que la aceleración es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt},$$

habiendo tomado en cuenta que la distancia r se mantiene constante al moverse la partícula sobre la esfera. Ahora, dado que el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{k}$ se tiene que

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -(\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{k})\dot{\theta} = -\hat{\mathbf{r}}\dot{\theta}$$

resultando en que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r(\dot{\theta})^2\hat{\mathbf{r}}.$$

La aceleración tiene una componente radial que es perpendicular a la componente tangencial y apunta siempre hacia el centro de la esfera; esta es la componente centrípeta² de la aceleración.

2. Recordar que *centrípeta* significa «que busca el centro».

Al aplicar el principio de acción resultan las ecuaciones de movimiento como sigue,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad r \ddot{\theta} \hat{\theta} - r(\dot{\theta})^2 \hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{N}{m} - g \cos \theta \right) \hat{\mathbf{r}} + g \sin \theta \hat{\theta}.$$

Tenemos dos ecuaciones, una para cada una de las coordenadas. Para la componente tangencial (el coeficiente de $\hat{\theta}$) se tiene

$$r \ddot{\theta} = g \sin \theta \quad \rightarrow \quad \frac{r}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta})^2 = -g \frac{d}{dt} \cos \theta$$

y la ecuación al lado derecho resulta de multiplicar por $\dot{\theta}$. Integrando se obtiene

$$r(\dot{\theta})^2 = -2g \cos \theta + c.$$

La constante de integración c se determina evaluando a $t = 0$ con los condiciones iniciales $\theta_0 = 0$ y $\dot{\theta}_0 = 0$; que resulta en $c = 2g$ por lo que

$$r(\dot{\theta})^2 = 2g(1 - \cos \theta).$$

Ahora la componente radial (el coeficiente de $\hat{\mathbf{r}}$) del principio de acción da la ecuación

$$r(\dot{\theta})^2 = g \cos \theta - \frac{N}{m}.$$

Igualando las dos últimas ecuaciones se obtiene la magnitud de la fuerza $\mathbf{N}$ de restricción

$$N = mg(3 \cos \theta - 2).$$

El ángulo de posición en el que $N = 0$

$$\cos \theta_E = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \theta_E \approx 48^\circ$$

es el punto θ_E de la esfera en el que la partícula escapa (o se separa) de la esfera y continúa su trayecto en caída libre. En el esquema de la figura 3.3 el ángulo polar (el punto) de escape θ_E está indicado por el radio dibujado a trazos cortos.

La magnitud de la velocidad en el punto de escape es

$$v_E = r \dot{\theta}_E = \sqrt{\frac{2}{3}} rg.$$

Como es común en la Tierra plana, el punto y la velocidad de escape son independientes de la masa de la partícula.

<https://predictiva21.com/definicion-friccion/>

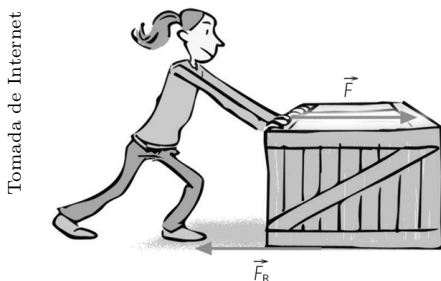


Figura 3.4

3.8. La resbaladilla rugosa

Una fuerza importante en los movimientos restringidos aquí en la Tierra plana, además del «empuje» $\mathbf{N}$ normal a la superficie de apoyo, es la *fuerza de fricción* $\mathbf{f}$, considerada una fuerza de restricción más. La resistencia del aire es una fuerza de fricción diferente a la de dos superficies que se tallan una contra otra; el efecto mecánico del aire lo vamos a modelar en la siguiente sección.

La magnitud de la fuerza de fricción en un movimiento restringido depende de la *textura* de las superficies que se tallan una contra otra; pero en general, mientras más «fuerte» es el apoyo $\|\mathbf{N}\| = N$, mayor es la fuerza de fricción: el carpintero debe presionar fuerte sobre la lija para alisar bien una tabla.

Una caja pesada en la figura 3.4 se talla contra el suelo, produciendo una fuerza de fricción que es proporcional al peso de la caja (más pesada, más fricción) y que se opone a que la caja se resbale sobre el piso por la acción del empuje $\mathbf{F}$ que le imprime la chava.

El modelo más simple de fricción es considerar la magnitud $f = \|\mathbf{f}\|$ de la fuerza de fricción como proporcional a la magnitud de la fuerza de apoyo contra la superficie,

$$f = \|\mathbf{f}\| = \mu N.$$

En el modelo, el coeficiente de proporcionalidad μ se considera constante y se le llama *coeficiente de fricción*. El coeficiente de fricción μ depende de la naturaleza de las superficies en contacto. La dirección de la fuerza de fricción $\mathbf{f}$ se define

paralela y opuesta (con el signo contrario) a la velocidad de desplazamiento, que es tangente a la superficie de restricción: la fuerza de fricción siempre se opone al movimiento.

El ejemplo a tratar es la resbaladilla de la figura 3.2 en la que suponemos ahora que la fuerza de fricción es importante y la llamamos la *resbaladilla rugosa*, con coeficiente de fricción $\mu > 0$.

El análisis de fuerzas para la resbaladilla rugosa es similar al de la figura 3.2, solo hay que incluir la fuerza de fricción

$$\mathbf{f} = -\mu (mg \cos \theta) (\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{k}).$$

En nuestro modelo, la magnitud de la fuerza de fricción $\mathbf{f}$ es proporcional a $\|\mathbf{N}\| = mg \cos \theta$, con coeficiente de fricción μ , y la fuerza $\mathbf{f}$ va en dirección opuesta a la bajada de la resbaladilla, especificada por el vector unitario $\mathbf{T} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{k}$.

La fuerza total sobre la partícula es

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)(\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{k}),$$

con la que escribimos la ecuación de movimiento

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \rightarrow (\ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{z} \mathbf{k}) = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)(\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{k}).$$

Todo el efecto de la fricción consiste en reducir aún más la aceleración de la gravedad g , por el factor $(\sin \theta - \mu \cos \theta) > 0$.

El modelo «predice» que si el ángulo de la resbaladilla no excede un valor mínimo (dado por $\mu = \tan \theta_m$) la partícula se mantendrá en reposo sin resbalar, por efecto de la fricción.

Integrando una primera vez cada una de las componentes de la ecuación de movimiento, suponiendo que $\theta > \theta_m$, se obtienen las velocidades

$$v_x = gt(\sin \theta - \mu \cos \theta) \cos \theta, \quad v_z = -gt(\sin \theta - \mu \cos \theta) \sin \theta;$$

las constantes de integración se determinaron por la condición de que la partícula inicia ($t = 0$) desde el reposo, $\mathbf{v}_0 = 0$. La magnitud de la velocidad a lo largo de la resbaladilla es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = gt(\sin \theta - \mu \cos \theta).$$

Las ecuaciones para las velocidades se integran una vez más para obtener $x(t)$ y $z(t)$. La distancia recorrida es

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2(\sin \theta - \mu \cos \theta).$$

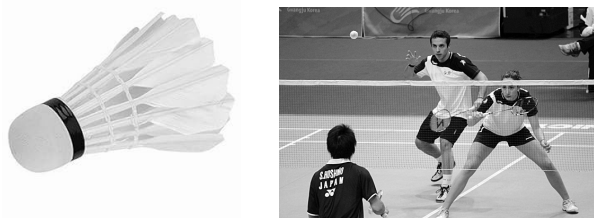


Figura 3.5

3.9. El bádminton

Se juega con un gallito emplumado muy ligero que pesa 5g y es frenado muy rápidamente por la resistencia del aire, por esto es que la red de bádminton está a una altura de apenas pasadito el metro y medio (152.4cm). Un gallito típico y la posición chaparrita de la red se muestran en la figura 3.5.

A diferencia de una pelota de golf o una de beis, para un gallito de bádminton la fuerza de fricción del aire es muy importante en determinar su movimiento.

El manojo de plumas que el gallito de la figura 3.5 arrastra al volar, va «tallando» contra el aire y eso produce una fricción que es determinante para su trayectoria. Para proponer una fuerza que modele la resistencia del aire observamos que a mayor velocidad de vuelo más intenso es el «tallar» de las plumas con el aire y observamos también que la dirección de la fuerza de fricción que ejerce el aire sobre el gallito es tal que se opone a su movimiento.

De estas observaciones el modelo que resulta es un fuerza de fricción en el aire que es proporcional a la velocidad y con el signo contrario

$$\mathbf{A} = -\beta \mathbf{v},$$

la constante de proporcionalidad β es una medida de la *resistencia del aire*, que es positiva y tiene unidades $[\beta] = \text{gr/s}$. El valor de β depende del objeto y de la forma que este tenga.

El modelo lineal en $\mathbf{v}$ para la resistencia $\mathbf{A}$ del aire que vamos a utilizar es adecuado para objetos de baja densidad como el gallito de bádminton, una pelota de ping-pong, caída en paracaídas o un copo de nieve. Para objetos más densos,

como las gotas de lluvia, es más apropiado un modelo para la resistencia del aire que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Este modelo es no lineal y no lo trataremos.

En el juego de bádminton sobre el gallito volando actúa la fuerza de gravedad $-mg\mathbf{k}$ y la resistencia del aire $\mathbf{A}$. La fuerza total sobre el gallito es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k} - \beta\mathbf{v}$$

y el principio de acción lleva a la ecuación de movimiento,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} - \beta\mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\beta/m)\mathbf{v} = -g\mathbf{k},$$

que es una ecuación diferencial para $\mathbf{v}$ de primer orden. Para resolver la ecuación, multiplicamos por el factor de integración $e^{\beta t/m}$ para obtener la ecuación

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}e^{\beta t/m}) = -ge^{\beta t/m}\mathbf{k}$$

que se integra directamente,

$$\mathbf{v}e^{\beta t/m} = -\frac{mg}{\beta}e^{\beta t/m}\mathbf{k} + \mathbf{c} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = -\frac{mg}{\beta}\mathbf{k} + \mathbf{c}e^{-\beta t/m}.$$

El vector constante de integración $\mathbf{c}$ se determina evaluando en $t = 0$ y suponiendo la condición inicial general para la velocidad

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{j} + v_0 \sin \alpha \mathbf{k}$$

resultando en

$$\mathbf{c} = v_0 \cos \alpha \mathbf{j} + v_0 \sin \alpha \mathbf{k} + \frac{mg}{\beta}\mathbf{k} = \mathbf{v}_0 + \frac{mg}{\beta}\mathbf{k}.$$

Sustituyendo $\mathbf{c}$ en la fórmula para $\mathbf{v}$ se obtiene la solución final para la velocidad,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\beta t/m})\mathbf{k}.$$

El primer término en la velocidad es parte de un movimiento transitorio que tiene un tiempo característico $\tau = m/\beta$.

Una vez pasado el transitorio ($t \gg \tau$) no queda vestigio de la condición inicial $\mathbf{v}_0$ en el movimiento del gallito: al final el *medio resistivo* (la atmósfera) es el (la) determinante. Este efecto en $\mathbf{v}(t)$ está en el término en $\mathbf{k}$, que empieza siendo

cero y después del transitorio es el que domina, manteniéndose (asintóticamente, $t \rightarrow \infty$) a una velocidad de caída recta constante

$$\mathbf{v}_{\infty} = -\frac{mg}{\beta}\mathbf{k},$$

mientras mayor es la resistencia del aire β sobre el objeto, menor es la velocidad de caída asintótica. Este es el principio en el que se basa el *paracaídas*, que tiene una forma de gran ampolla que se infla y que logra valores muy grandes de β para que un gordo (de gran m) baje a tierra a una velocidad constante no muy alta (para evitar un trancazo contra el suelo).

La trayectoria $\mathbf{r}(t)$ se obtiene integrando la ecuación para la velocidad,

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{m}{\beta}\mathbf{v}_0 e^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}e^{-\beta t/m}\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2,$$

el vector constante de integración $\mathbf{c}_2$ se determina evaluando a $t = 0$ y suponiendo la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$. El resultado es

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{m}{\beta}\mathbf{v}_0 + \frac{m^2g}{\beta^2}\mathbf{k}.$$

Sustituyendo el vector $\mathbf{c}_2$ en la fórmula para la trayectoria se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{m}{\beta}\mathbf{v}_0(1 - e^{-\beta t/m}) - \frac{m^2g}{\beta^2}\left(e^{-\beta t/m} - \left(1 - \frac{\beta}{m}t\right)\right)\mathbf{k}.$$

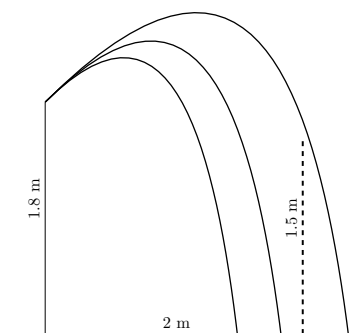
El transitorio en el movimiento que comentamos anteriormente también es aparente en la fórmula para la trayectoria. Asintóticamente se tiene

$$\mathbf{r}_{\infty}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{m}{\beta}\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{\infty}t$$

que es un trayecto recto que desciende verticalmente a velocidad $\|\mathbf{v}_{\infty}\|$ constante y desde la posición «aparente» dada por los primeros dos términos, que fueron establecidos en las condiciones iniciales.

En la figura 3.6 se graficaron tres trayectos para un gallito de bádminton de 5g, suponiendo que tiene una resistencia en el aire de $\beta = 8.33\text{g/s}$. Se deja como ejercicio el reproducir la gráfica usando la fórmula de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$.

Otro buen ejercicio es poner a prueba experimental el modelo lineal para $\mathbf{A}$ que hemos discutido, pues existe otro modelo



Tres golpes dados a un gallito de bádminton a una altura de 1.8m, a 45° y dirigidos hacia la red que está a una distancia de 2m. Dos de los golpes no tienen la velocidad inicial suficiente para pasar al otro lado de la red.

Figura 3.6

que propone una fuerza de resistencia al aire que es cuadrática en la velocidad, $\mathbf{A} = -r\|\mathbf{v}\|\mathbf{v}$. ¿Cuál modelo describe mejor al gallito de bádminton? La decisión está en comparar cada uno de los modelos con lo que se observa experimentalmente. El que mejor reproduzca la mayoría de los casos es el que gana. Una buena prueba eliminatoria sería comparar con el experimento la dependencia funcional en m de la velocidad asintótica.

3.10. Fuerzas disipativas y conservativas

La fuerza de fricción y la resistencia del aire son acciones *disipativas*, indicando con esto que el trabajo realizado por una fuerza disipativa genera formas de energía que no son útiles para la mecánica, es energía que se «disipa» (escapa) del sistema mecánico de interés.

La fuerza de fricción actuando en la pesada caja que talla el suelo en la figura 3.4 produce vibraciones acústicas (chirridos o crujidos), deja marcas (arañazos) sobre el piso y produce calor (nos tallamos las manos para calentarlas) y estas formas de energía no pueden aprovecharse para el movimiento, constituyen energía que se «disipa», energía que se escapa del dominio mecánico.

El enunciado de conservación 2.6 (en la página 27) solo considera las dos formas de energía mecánica (la potencial y la cinética, ir a leer de nuevo los enunciados 2.3 y 2.4) y entonces el enunciado no es válido para las fuerzas disipativas, que involucran formas de energía que no son mecánicas.

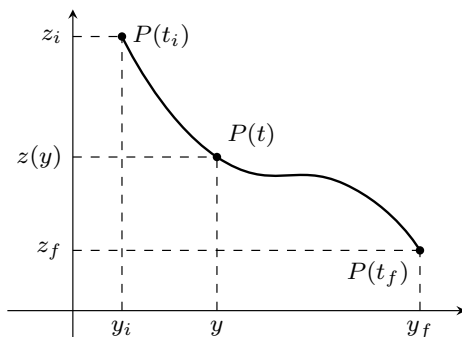


Figura 3.7

Por el contrario, la mecánica teórica llama *conservativas* a las acciones para las cuales el enunciado 2.6 es válido. En la Tierra plana el campo de fuerza gravitacional es un campo gradiente y es conservativo.

En el ejemplo siguiente se ilustra cómo el enunciado de conservación 2.6 ayuda a resolver de «manera directa» cierto tipo de problemas.

Nuestro ejemplo es una canica de masa m engarzada en el alambre de la figura 3.7 (la curva $z = z(y)$ conocida) y que se desliza sin fricción (conservativamente) desde el punto inicial $P(t_i)$ al punto final $P(t_f)$, partiendo con velocidad inicial cero, $\mathbf{v}_i = 0$.

Supondremos conocida la forma geométrica de la trayectoria que sigue una partícula en la Tierra plana, sabemos que es una curva plana³ que es descrita por la coordenada $z = z(y)$ en función de la coordenada y .

El sistema de coordenadas en la figura 3.7 pone a la curva de la trayectoria sobre el plano y - z , esto es que $x(t) = 0$ y que si eliminamos el parámetro t de las ecuaciones $y = y(t)$ y $z = z(t)$ (en caso de conocer $\mathbf{r}(t)$, pero no) obtenemos la función $z = z(y)$ (que es el dato).

3. Puede ayudar a captar la idea de lo que es una curva plana viendo el contraejemplo en la figura 1.1 de la página 4, que no es una curva plana pues no existe un plano que la pueda contener.

El problema consiste en calcular $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (cómo se desliza la canica por el alambre en función de t) y en particular el tiempo $T = t_f - t_i$ que le toma a la canica hacer el recorrido completo.

En lugar de aplicar el principio de acción para resolver el problema, usamos el enunciado de conservación 2.6 que nos dice que en un campo gradiente la energía total $E = T + V$ es una constante a lo largo de la trayectoria, E es independiente de t .

La partícula parte del reposo desde el punto $P(t_i)$, que está a la altura z_i . La energía total al inicio es solo potencial

$$E = mgz_i$$

pero es la misma en cualquier punto $P(t)$ así que

$$E = mgz_i = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgz(y)$$

de donde se obtiene que

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z_i - z(y))}$$

y dado que $ds = \sqrt{dz^2 + dy^2} = dy\sqrt{z'(y)^2 + 1}$ obtenemos una ecuación para $y(t)$,

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g(z_i - z(y))}{z'(y)^2 + 1}}$$

en donde las funciones $z(y)$ y $z'(y)$ son conocidas. Tomando $t_i = 0$ e integrando la ecuación anterior se tiene que

$$t = \int_{y_i}^y \sqrt{\frac{z'(y)^2 + 1}{2g(z_i - z(y))}} dy.$$

Esta ecuación resuelve, en principio, el problema. El tiempo T para hacer el recorrido total se obtiene poniendo $y = y_f$ en el límite superior de la integral en la solución anterior.

Digo que el problema se resuelve «en principio» pues el asunto será ahora poder evaluar de manera cerrada la integral para luego despejar la coordenada y en función de t .

Con el fin de ilustrar el uso de la solución anterior consideramos el caso simple de un alambre recto con $z(y) = z_i - y$

$$t = \int_{y_i=0}^y \sqrt{\frac{1 + 1}{2g(z_i - (z_i - y))}} dy = \frac{2}{\sqrt{g}} y^{1/2}$$

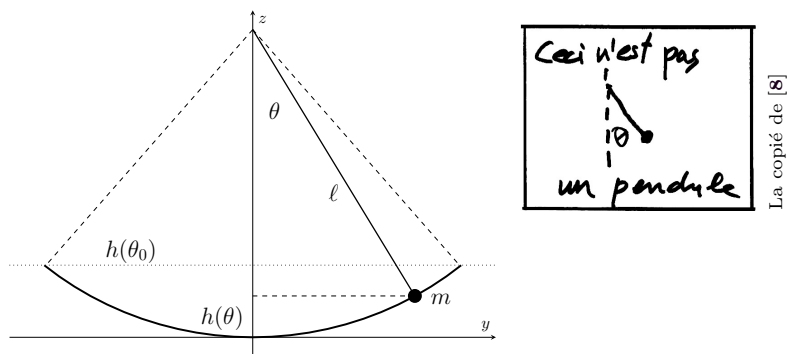


Figura 3.8

de donde despejamos la coordenada y en función de t ,

$$y(t) = \frac{1}{4}gt^2, \quad \text{para un alambre recto a } 45^\circ.$$

Así que para un movimiento conservativo podemos (en principio) encontrar la trayectoria de un movimiento restringido a partir de la energía, sin usar las fuerzas. Para comparar, ver el análisis de fuerzas de la resbaladilla en la figura 3.2, que es un trayecto recto.

3.11. El péndulo

El movimiento de la canica (de masa m) de un péndulo está restringido al arco de un círculo por el hilo de longitud ℓ que sostiene a la canica. El hilo como restricción es perfectamente rígido, no se pliega en ninguna circunstancia; así que lo mejor es pensar en él como un alambre rígido, aunque le llame hilo.

La variable mecánica del péndulo es el ángulo $\theta = \theta(t)$ que hace el hilo en cualquier momento t con el eje- z . La situación panorámica a un tiempo t se ubica en el plano y - z y se esquematiza en la figura 3.8. La caricatura va con disculpas para René Magritte y para ser concientes de que no es un péndulo lo que nos enseñaban en los cursos de física general.

El análisis de fuerzas actuando sobre la canica, necesaria para aplicar el principio de acción, se hace en el diagrama de la figura 3.9. El vector unitario tangente a la trayectoria y el

El peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$ de la canica se expresa como la suma $\mathbf{F} + \mathbf{N}$ de sus componentes tangencial,

$$\mathbf{F} = -mg \sin \theta \boldsymbol{\theta}$$

y radial

$$\mathbf{N} = mg \cos \theta \boldsymbol{\tau}.$$

La tensión que hace el hilo es radial, $\mathbf{T} = -T\boldsymbol{\tau}$, y la fuerza actuando sobre la canica es la suma

$$\mathbf{T} + \mathbf{W} = \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{F}.$$

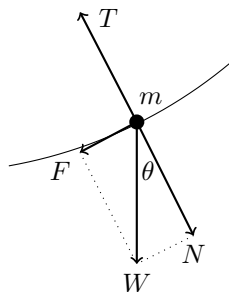


Figura 3.9

vector radial unitario son

$$\boldsymbol{\theta} = \cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau} = \sin \theta \mathbf{j} - \cos \theta \mathbf{k}.$$

La canica se ubica en la posición $\mathbf{r} = \ell \boldsymbol{\tau}$, con longitud ℓ del hilo constante, por lo que la velocidad y la aceleración de la canica restringida a un círculo de radio ℓ son

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \ell \dot{\theta} \boldsymbol{\theta} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ell \ddot{\theta} \boldsymbol{\theta} - \ell (\dot{\theta})^2 \boldsymbol{\tau}.$$

La aplicación del principio de acción se hace con la fuerza actuando sobre la canica de acuerdo a como se obtuvo en el análisis de fuerzas en la figura 3.9; con esta fuerza se obtiene la ecuación de movimiento para la canica

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{F} = -T\boldsymbol{\tau} + mg \cos \theta \boldsymbol{\tau} - mg \sin \theta \boldsymbol{\theta} \\ &= m\ell \ddot{\theta} \boldsymbol{\theta} - m\ell (\dot{\theta})^2 \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

La componente tangencial de la ecuación de movimiento es la ecuación diferencial para la variable dinámica θ ,

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta \quad (3.5)$$

donde introducimos el parámetro

$$\omega^2 = g/\ell, \quad \text{con unidades } [\omega] = \text{s}^{-1}.$$

El parámetro ω tendrá el sentido de una velocidad angular. Como muchos otros casos en la Tierra plana, la ecuación diferencial no lineal de segundo orden para θ es independiente de la masa m de la canica.

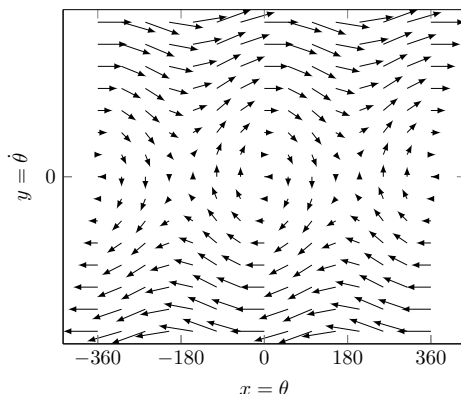


Figura 3.10

La componente radial de la ecuación de movimiento nos da la magnitud de la tensión en el hilo

$$T = mg \cos \theta + m\ell(\dot{\theta})^2;$$

además del peso de la canica la tensión tiene una contribución de la componente centrípeta de la aceleración. Para conocer T primero hay que conocer $\theta(t)$. Para ello, a continuación llevamos la ecuación diferencial de orden 2 en (3.5) para la variable θ al espacio de fase bidimensional.

Para no batallar en contra de la costumbre, introduzco las variables $x = \theta$ y $y = \dot{\theta}$ para formar el vector $\mathbf{f} = (x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ que es un punto en el espacio de fase. Las ecuaciones para x y y se obtienen de la ecuación (3.5) para θ ,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 \sin x \end{pmatrix} = \mathbf{V}(x, y), \quad (3.6)$$

esta es la ecuación para el péndulo en el espacio de fase con campo de velocidades $\mathbf{V}(x, y) = (y, -\sin^2 x)^t$ no lineal.

La gráfica en la figura 3.10 del campo de velocidades nos da ya una idea de cómo son las órbitas del péndulo en el espacio de fase y aún no hemos resuelto la ecuación de movimiento. Observamos dos estructuras en el flujo: la estructura de órbitas cerradas concéntricas y la de órbitas extendidas, no acotadas.

En algunos sistemas conservativos, como el péndulo, la energía es una entrada (casi) directa a las curvas integrales en el espacio de fase, sin necesidad de integrar la ecuación no lineal de movimiento (3.5). Partiendo del enunciado de conservación de la energía seguiremos un procedimiento similar al de la sección anterior.

El enunciado 2.6 dice que la energía total

$$E = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + V(\theta) \quad (3.7)$$

es una constante, que para el péndulo la conoceremos (la calcularemos) a partir de las condiciones iniciales (de cómo arranca el movimiento), y esa E es la misma siempre.

La función de energía potencial $V(\theta)$ también es conocida, pues el movimiento está restringido a un arco de círculo de radio ℓ . A partir del esquema en la figura 3.8 encontramos que

$$V(\theta) = mgh(\theta) = mg\ell(1 - \cos \theta).$$

El máximo de energía potencial $V_{max} = 2mg\ell$ ocurre para $\cos \theta = -1$ que es cuando la canica está en el punto más alto del círculo al que está restringida a moverse, en $\theta = \pi$. Este es un punto de equilibrio inestable del péndulo, si se usa como condición inicial hay que darle una «patadita» a la canica para sacarla de equilibrio.

Para las condiciones iniciales con $\dot{\theta}(0) = 0$ (el movimiento parte del reposo) se tiene que $E < V_{max} = 2mg\ell$ y veremos que el caso $E = V_{max} = 2mg\ell$ es un *punto de bifurcación*: esto quiere decir que a partir de $E = V_{max}$ el péndulo deja de moverse en vaivén, y que para los movimientos con $E > V_{max}$ el péndulo entra a un régimen diferente al del vaivén.

Para tratar el vaivén tomamos una condición inicial que no imprime impulso a la canica ($\dot{\theta}(0) = 0$) a un ángulo de partida $\theta(0) = \theta_0 > 0$, señalado por las líneas a trazos cortos en el ejemplo esquematizado en la figura 3.8. Con una condición inicial de reposo, la altura máxima que en cualquier momento alcanzará la canica es $h(\theta_0)$, altura marcada con una línea horizontal a puntos en el esquema de la figura 3.8. Cuando la canica está a esa altura toda su energía es potencial (pues $\dot{\theta} = 0$) y así encontramos que

$$E = mgh(\theta_0) = mg\ell(1 - \cos \theta_0),$$

esta es la energía total de la canica en cualquier momento t .

Antes de sustituir esta energía en la ecuación de conservación (3.7) observamos que

$$v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \ell \dot{\theta} \quad \text{y además definimos} \quad \omega^2 = g/\ell.$$

Ahora sí sustituimos E en (3.7) y despejamos la velocidad angular $\dot{\theta}$ para obtener la ecuación

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}. \quad (3.8)$$

Antes de pasar a integrar esta ecuación, vamos a ver cómo la gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}$ vs θ aporta información muy relevante sobre el movimiento del péndulo. Los puntos $(\theta, \dot{\theta}(\theta))$ de la gráfica de (3.8) están en el espacio $\mathbb{R}^2$ que se le conoce como *espacio de fase* y al conjunto de curvas integrales se le conoce como *retrato de fase*. Para tener el retrato de fase completo del péndulo, a continuación calculamos $\dot{\theta}$ en función de θ para el caso en que $E > V_{max}$.

La conservación de la energía total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\theta) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta)$$

nos permite calcular la velocidad

$$v = \ell \dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2}m(E - mg\ell(1 - \cos \theta))}$$

de la que obtenemos

$$\dot{\theta} = 2\omega \sqrt{\mathcal{E} - \sin^2(\theta/2)} \quad (3.9)$$

donde se definió $\mathcal{E} = E/V_{max} > 1$. El valor de E queda determinado por las condiciones iniciales con $|\dot{\theta}_0| > 0$, lo suficientemente grande para tener $E > V_{max}$.

En la figura 3.11 se muestran algunas de las curvas integrales del retrato de fase del péndulo, usando las fórmulas (3.8) y (3.9). Al ir aumentando el valor de la energía total E , las curvas concéntricas en la región de vaivén en la figura 3.11 se van agrandando y alejándose de la forma circular hasta llegar al caso límite $E = V_{max}$. Esta curva límite es la que separa los dos regímenes de movimiento del péndulo y se le conoce como *separatriz*.

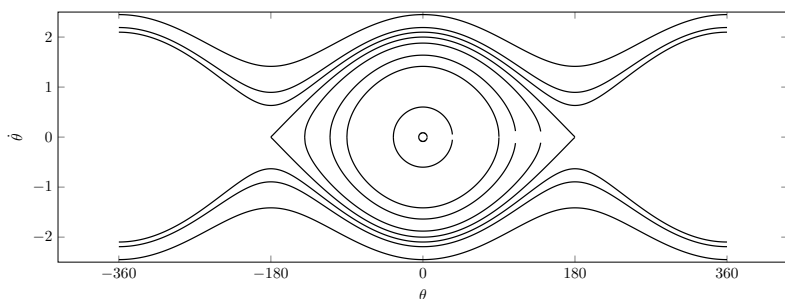


Figura 3.11

Al exterior de la separatriz las curvas en el espacio de fase son abiertas, no acotadas y periódicas, cuando $E > V_{max}$ el péndulo gira siempre en el mismo sentido en lugar de oscilar en vaivén.

Ahora pasamos a integrar la ecuación (3.8) para obtener la solución de vaivén de manera implícita

$$\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_{\theta_0/2}^{\theta/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta}}.$$

La integral que se obtiene es elíptica y no existe una expresión cerrada (así que no aparece en las tablas de integrales, ni la busquen). La integral puede expresarse como una combinación lineal de las funciones elípticas de Jacobi, que pueden estudiarse en la referencia [20, pp 491–535].

Una excepción es la separatriz, cuando la canica tiene una energía total $E = V_{max} = 2mg\ell$, que corresponde a $\cos \theta_0 = -1$ en la ecuación de movimiento (3.8),

$$\dot{\theta} = \omega \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta}.$$

La integral que resulta para la separatriz no es elíptica y sí tiene una forma cerrada,

$$\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \ln \tan \left(\frac{\theta + \pi}{4} \right). \quad (3.10)$$

Hemos supuesto que (a $t = 0$) la condición inicial es $\theta_0 = 0$ y $\dot{\theta}_0 = \pm 2\omega\ell$, es decir que la canica parte desde la posición de altura mínima ($\theta = 0$), con la velocidad angular justa para

llegar (en el límite $t \rightarrow \infty$) al punto de altura máxima, yendo hacia la derecha o hacia la izquierda ($\theta = \pm\pi$).

La solución para el movimiento en la separatriz ($E = V_{max}$) se obtiene de la integral (3.10)

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 4 \tan^{-1}(e^{\omega t}) - \pi, \\ \dot{\theta}(t) &= \pm \frac{4\omega}{\cosh \omega t}.\end{aligned}$$

A la forma de $\dot{\theta}(t)$ se le conoce como un *solitón* y a la forma de $\theta(t)$ se le conoce como un *kink*.

El péndulo es un sistema mecánico simple (cualquiera puede armar uno) pero es no lineal. Un primer paso en el estudio de un sistema no lineal es conocer las soluciones en la vecindad de sus puntos de equilibrio estable, aproximando la ecuación no lineal por una lineal. El péndulo tiene al punto $\theta = 0$ como un equilibrio estable y para la solución general en el modo de vaivén la aproximación lineal se conoce como *aproximación armónica*.

Si la canica se mueve a ángulos pequeños (como los antiguos relojes de pie) en los que es válida la aproximación

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2,$$

usando esta aproximación en la solución, la integral se puede calcular (esta sí aparece en las tablas),

$$\omega t \approx \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \sin^{-1} \frac{\theta}{|\theta_0|} - \frac{\pi}{2}.$$

Despejando $\theta = \theta(t)$ obtenemos la aproximación armónica para el péndulo

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t).$$

El péndulo en la aproximación armónica oscila a una frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/\ell}$, que (como muchos otros movimientos en la Tierra plana) no depende de la masa de la canica. Las oscilaciones armónicas son todo un tema que estudiaremos en el capítulo que sigue.

3.12. Una versión discreta del péndulo

Una estrategia «rudimentaria» para convertir la ecuación diferencial no lineal (3.6) del péndulo en «algo manejable», al menos numéricamente (y así evitarnos las funciones elípticas de Jacobi), es convertir la variable continua t del tiempo en la variable discreta $t_n = n\tau$, $n \in \mathbb{Z}$, que sigue el tic-tac de un reloj a intervalos constantes τ ,⁴ y considerar las variables discretas $x_n = x(t_n)$ y $y_n = y(t_n)$.

Para que la discretización sea significativa (en cuanto a reproducir al péndulo) se requiere que el intervalo entre tic y tac sea muy pequeño, $\tau \ll 1/\omega = \sqrt{\ell/g}$, y entonces remplazar en (3.6) las derivadas $\dot{x}$ y $\dot{y}$ por diferencias.

Para la primera coordenada de (3.6) se tiene

$$\dot{x}(t_{n+1}) = y(t_{n+1}) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_{n+1} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = y_{n+1}$$

de donde resulta la ecuación

$$x_{n+1} = x_n + \tau y_{n+1} = x_n + q_{n+1},$$

en la que se introdujo el cambio de variable $q_n = \tau y_n$.

Para la segunda coordenada de (3.6) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_{n+1}) = -\omega^2 \sin x(t_{n+1}) &\quad \rightarrow \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} \approx -\omega^2 \sin x_n \\ &\quad \rightarrow \quad q_{n+1} = q_n - K \sin x_n, \end{aligned}$$

con el nuevo parámetro adimensional $K = (\tau\omega)^2$, el *parámetro perturbativo* (la designación viene del oscilador forzado a martillazos (*kicked* en inglés)).

En términos de las variables x_n y q_n , la ecuación de movimiento del péndulo no lineal (3.6) la hemos remplazado por el

-
4. Una serie de tiempos de muestro (t_n) uniforme es el primer paso cuando no disponemos de información dinámica. La idea de que a intervalos τ más pequeños tenemos un mejor modelo discreto del sistema continuo se apoya en el *teorema de muestreo* [12, Chap. III] para los sistemas lineales, que, para τ pequeña, nos promete como observadores un *ancho de banda* grande, que cubre, el ancho de banda del sistema y nada se nos escapa. Para los sistemas no lineales es más apropiado usar series de tiempos de muestreo (t_n) guiadas por los tiempos de escape o de recurrencia (de Poincaré) de una cierta región del espacio de fase.

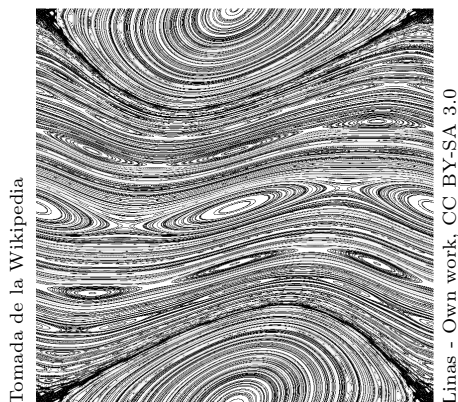


Figura 3.12

siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n - K \sin x_n \\ x_{n+1} &= x_n + q_{n+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Las ecuaciones (3.11) se conocen como el *mapeo estándar* de Chiricov,[5, 6] quien fue un pionero en el estudio del caos dinámico en los sistemas mecánicos (hamiltonianos).

La condición para que el retrato de fase del mapeo estándar se parezca al retrato del péndulo es que $K \ll 1$. Aunque el mapeo estándar (3.11) haya surgido como una discretización del péndulo, el mapeo tiene un interés en sí mismo para cualquier valor del parámetro $K > 0$.

El mapeo estándar describe de manera genérica a una amplia clase de mapeos que preservan área. En la figura 3.12 se muestra el retrato de fase sobre la dona del mapeo estándar (3.11) con parámetro $K = 0.6$.⁵ Aún para este gran valor de K el retrato de fase “recuerda” que el mapeo estándar proviene del péndulo. El vértice de la separatriz está en las esquinas del retrato de fase y cuando se le amplifica muestra una estructura muy compleja, llamado *caos en la separatriz* en [21].

El mapeo estándar tiene una fenomenología muy rica,[6] dependiendo del parámetro perturbativo K . La dinámica es casi regular cuando $K \ll 1$ y tiene un punto crítico $0.971 < K_c <$

5. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=12053416>

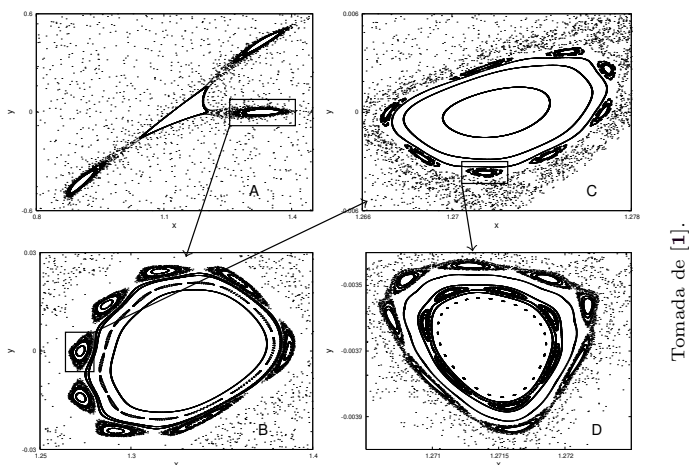


Figura 3.13

$63/64 = 0.984375$ en el que ocurre una transición a una fase de islas de estabilidad en un mar estocástico. En la figura 3.13 se muestra una región amplificada del retrato de fase con algunas islas para el parámetro $K = 6.908745$; tomada de [1] y solo le añadí unas flechas para indicar la secuencia de ampliificaciones de los trozos del retrato de fase en los recuadros. La dinámica global del mapeo estándar es caótica para $K \gg 1$.

Como se ha visto, el mapeo estándar (3.11), que deriva del péndulo simple (pero no lineal) (3.6), es un laboratorio barato y de gran interés para los amantes de la computación científica (numérica y visual).

3.13. Formas en equilibrio

El principio anti-bootstrap establece que todas las fuerzas internas de un sistema mecánico suman a cero; por lo que un objeto permanece en equilibrio cuando la fuerza neta actuando sobre él es cero.

Un caso de esta situación es una cadena en la Tierra plana que se sostiene suspendida de sus extremos en dos puntos altos; el resto de la cadena que cuelga libremente tiene una forma de equilibrio típica que se ilustra en la fotografía de la figura 3.14.

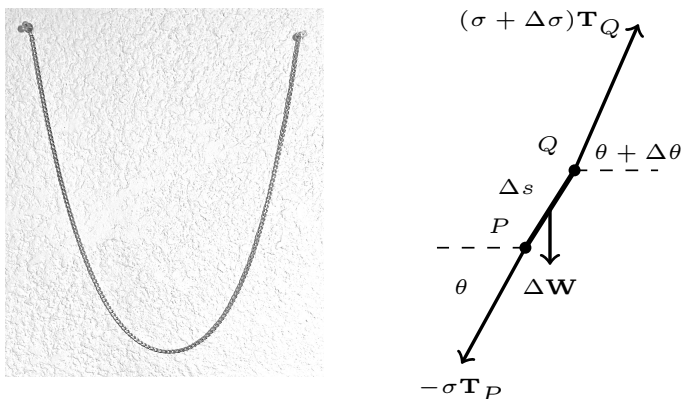


Figura 3.14

La curva que forma la cadena se llama *catenaria*.⁶ Mientras no se ejerza una acción sobre la cadena, la catenaria mantiene su forma. A continuación aplicaremos el principio anti-bootstrap para obtener una fórmula matemática para la catenaria.

A la derecha de la figura 3.14 está el esquema (ubicado sobre el plano y - z) para el análisis de las fuerzas que actúan sobre un eslabón de la cadena. El eslabón tiene longitud Δs y sus extremos, en los puntos P y Q de la catenaria, son tensados por los tramos inferior y superior (respectivamente) de la cadena. Para no complicar el dibujo, la cadena no se incluye en el esquema.

En el punto P la cadena tira del eslabón con la fuerza $-\sigma \mathbf{T}_P$, con vector unitario $\mathbf{T}_P = \cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}$ tangente a la catenaria en el punto P y magnitud $\sigma > 0$ de la tensión. En el punto Q la fuerza sobre el eslabón es $(\sigma + \Delta\sigma) \mathbf{T}_Q$, la magnitud de la tensión en Q difiere de la tensión en P por la cantidad $\Delta\sigma$ y $\mathbf{T}_Q = \cos(\theta + \Delta\theta) \mathbf{j} + \sin(\theta + \Delta\theta) \mathbf{k}$ es el vector unitario tangente a la catenaria en el punto Q .

El ángulo entre los vectores unitarios $\mathbf{T}_P$ y $\mathbf{T}_Q$ es apenas $\Delta\theta$, un cambio muy leve del vector tangente entre los puntos extremos del eslabón, los puntos P y Q de la catenaria.

6. La palabra *catenaria* viene del latín *catena*, que significa cadena.

El eslabón es pequeño y muy ligero, tiene un peso de apenas $\Delta \mathbf{W} = -g \mu \Delta s \mathbf{k}$, donde μ es la densidad de masa ($[\mu] = \text{g/cm}$) uniforme a lo largo de la cadena, la masa del eslabón $\Delta m = \mu \Delta s$ es chiquita.

La condición de equilibrio para el eslabón es que la suma de las tres fuerzas actuando sobre él es cero

$$\Delta \mathbf{W} - \sigma \mathbf{T}_P + (\sigma + \Delta \sigma) \mathbf{T}_Q = 0.$$

Escribiendo la condición de equilibrio en la forma

$$\Delta \mathbf{W} = -g \mu \Delta s \mathbf{k} = \sigma \mathbf{T}_P - (\sigma + \Delta \sigma) \mathbf{T}_Q$$

vemos que en la diferencia de tensiones al lado derecho, las componentes y de las tensiones en P y en Q son iguales y se cancelan (pues $\Delta \mathbf{W}$ tiene componente y cero); mientras que las componentes z de las tensiones casi se cancelan, dejando una componente pequeña para sostener el peso $\Delta \mathbf{W}$ del eslabón.

La componente y de la condición de equilibrio

$$\sigma \cos \theta = (\sigma + \Delta \sigma) \cos(\theta + \Delta \theta) = \sigma_h,$$

como ya lo dijimos, no cambia a lo largo de la catenaria y la designamos como la constante σ_h .

La componente z de la condición de equilibrio conduce a

$$g\mu \frac{\Delta s}{\Delta \theta} = \frac{(\sigma + \Delta \sigma) \sin(\theta + \Delta \theta) - \sigma \sin \theta}{\Delta \theta}$$

que en el límite $\Delta s \rightarrow ds$ nos da una ecuación para $s = s(\theta)$,

$$g\mu \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\sigma \sin \theta) = \sigma_h \frac{d}{d\theta}(\tan \theta),$$

donde se sustituyó la magnitud de la tensión $\sigma = \sigma(\theta)$ usando la constante $\sigma_h = \sigma \cos \theta$. Introduciendo el parámetro $\beta = \sigma_h / g\mu$ (con unidades $[\beta] = \text{cm}$), la ecuación a resolver (para las coordenadas $y(\theta)$ y $z(\theta)$) es la siguiente

$$\frac{ds}{d\theta} = \beta \frac{d}{d\theta}(\tan \theta).$$

La coordenada y es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \beta \cos \theta \frac{d}{d\theta} \tan \theta = \beta \cos \theta \sec^2 \theta \\ &= \beta \sec \theta = \frac{\beta}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

Para la coordenada z la ecuación es

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\theta} &= \frac{dz}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \beta \sin \theta \frac{d}{d\theta} \tan \theta = \beta \sin \theta \sec^2 \theta \\ &= \beta \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}.\end{aligned}$$

Buscando en una tabla de integrales indefinidas se obtienen las siguientes soluciones

$$\begin{aligned}y(\theta) &= \beta \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \beta \ln(\sec \theta + \tan \theta) + c_1, \\ z(\theta) &= \beta \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \beta \sec \theta + c_2.\end{aligned}$$

Las constantes de integración se determinan escogiendo el origen de coordenadas en el mínimo de la catenaria, esto es $y(0) = 0$ y $z(0) = 0$, lo que fija $c_1 = 0$ y $c_2 = -\beta$. La fórmula de la catenaria está dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$y = \beta \ln(\sec \theta + \tan \theta) \quad \text{y} \quad z = -\beta + \beta \sec \theta. \quad (3.12)$$

Lo único que nos queda por hacer es eliminar el parámetro θ para obtener la fórmula para la catenaria. En el ejercicio 3.11 se dan indicaciones de cómo proceder para eliminar θ . Lo que resulta para los puntos $(y, z(y))$ de la catenaria es

$$\frac{z}{\beta} = -1 + \cosh(y/\beta),$$

en la escala de distancias dada por β . Miren de nuevo la catenaria en la fotografía de la figura 3.14, y si resuelven el ejercicio 3.12 se sorprenderán del resultado obtenido.

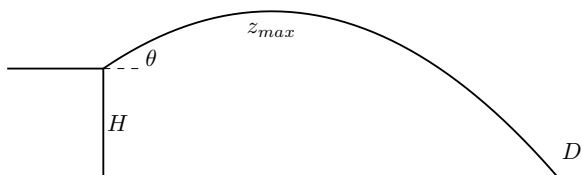
3.14. Ejercicios

3.4. Verificar explícitamente en cada uno de los casos de movimiento libre en la Tierra plana que fueron tratados en este capítulo, que la energía total $E = T + V$ es una constante independiente de t .

3.5. Se lanza una pelota desde la terraza del cuarto piso hacia el suelo (suponiendo que es plano y no el montón de piedras que es) haciendo un ángulo θ con la horizontal con el fin de hacer llegar la pelota a una receptora que está a una distancia D (ver

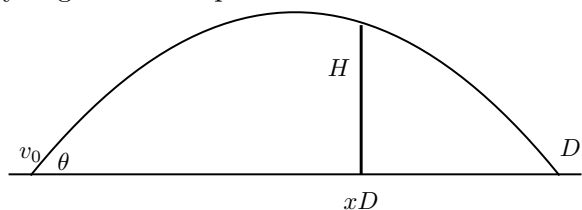
la ilustración correspondiente). Demostrar que, de lograrlo, la altura máxima (medida desde el suelo) que alcanza la pelota es

$$z_{max} = H + \frac{D^2 \tan^2 \theta}{4(H + D \tan \theta)}.$$



3.6. El problema inverso. Ahora la receptora del problema anterior que está en el suelo a una distancia D debe lanzar la pelota al lanzador que está en la terraza. (a). Determinar un ángulo θ y una velocidad v_0 de lanzamiento desde el suelo para hacer llegar la pelota desde el suelo al compañero de juego que está en la terraza. (b). Comparar la velocidad de lanzamiento desde el suelo con la velocidad desde la terraza. ¿Cuál de los dos jugadores la tiene más difícil?

3.7. El juego consiste en lanzar una pelota a una receptora que se encuentra a una distancia D , librando una barrera (por ejemplo una red) de altura H colocada en la posición intermedia xD , con $x \in (0, 1)$ (ver la ilustración correspondiente). Determinar un ángulo θ y una velocidad v_0 de lanzamiento para librar la barrera y llegar a la receptora.



3.8. Como una extensión del problema anterior, (a) determinar la velocidad de lanzamiento v_0 en función del ángulo de lanzamiento θ , que deben ser producidos por el impulso del bat, para que el bateador justo alcance a volarse la barda de 2.5m de altura que está a 150m de distancia. (b). Calcular el tiempo que le toma a la pelota llegar al borde de la barda cuando el cuadrangular se produce a $\theta = 45^\circ$.

3.9. Calcular las velocidades de lanzamiento v_0 para cada una de las trayectorias en la figura 3.1.

3.10. Para la resbaladilla esférica, calcular la trayectoria parabólica que sigue la partícula en caída libre a partir del punto de escape θ_E . Hacer una gráfica de la trayectoria completa, uniendo la parte circular con la parte parabólica en el punto de escape (la derivada debe ser continua).

3.11. Eliminar el parámetro θ de la forma paramétrica de la catenaria en (3.12) para obtener la fórmula $z = z(y)$ de la catenaria.

La recomendación es escribir en la ecuación para y en (3.12) $\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$ y sustituir $\sec \theta$ en función de z , quedando una ecuación que solo involucra a y y a z , de la cual hay que despejar a z en función de y .

3.12. Los puntos de suspensión de la catenaria en la fotografía de la figura 3.14 están separados por $2D = 28\text{cm}$ y están a una altura de $H = 34.5\text{cm}$ (medida a partir del mínimo de la catenaria). (a). Calcular (numéricamente) un valor aproximado de β (para el método que yo usé requerí la función inversa a $y = \cosh x$ (restringida a $[0, \infty)$), que es $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, con $y \in [1, \infty)$). (b). Graficar la fórmula $z = z(y)$ de la catenaria con el valor de β obtenido, en el dominio $y \in [-D, D]$, y comparar la gráfica con la fotografía.

(a). $\beta \approx 5.11\text{cm}$.

Algoritmo iterativo simple. El algoritmo que usé para determinar una aproximación a la β del problema anterior es simple y eficaz, por lo que lo voy a explicar aquí a continuación. Es un detalle cultural que no es necesario leer. Se lo pueden brincar sin remordimientos.

Nos son dadas las funciones $f, g : I_0 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ (de clase C^∞ para evitarnos complicaciones). Las funciones f y g son monótonas con $|f'(x)| > 0$ y $|g'(x)| > 0$ para todos los $x \in I_0$. Las gráficas de las funciones se intersectan en el punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ y la tarea es encontrar el punto de intersección $x_0 \in I_0$.

Si $|f'(x)| > |g'(x)|$ entonces $g(I_0) \subset f(I_0)$ y el mapeo

$$h = f^{-1} \circ g : I_0 \rightarrow I_0 \quad \text{está bien definido}$$

y tiene a x_0 como punto fijo, $h(x_0) = x_0$. Esta observación nos indica que hay que acotar a $|f'|$ por abajo y a $|g'|$ por arriba.

Lema 3.1. Sean las funciones $f, g : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tales y como fueron descritas anteriormente. Supóngase que hay constantes $\kappa > \lambda > 0$ tales que

$$|g'(x)| < \lambda < \kappa < |f'(x)|, \quad \forall x \in I_0.$$

El mapeo $h = f^{-1} \circ g : I_0 \rightarrow I_0$ es una contracción,

$$|h(x) - h(y)| < \frac{\lambda}{\kappa} |x - y|, \quad \text{con } \lambda/\kappa < 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Se ha supuesto que $|f(x) - f(y)| > \kappa|x - y|$. Tomando a x como $f^{-1}(x)$ y a y como $f^{-1}(y)$ se tiene que

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| < \frac{1}{\kappa} |x - y|.$$

Tomando en esta última desigualdad a x como $g(x)$ y a y como $g(y)$ se tiene que

$$|h(x) - h(y)| < \frac{1}{\kappa} |g(x) - g(y)| < \frac{\lambda}{\kappa} |x - y|,$$

con $\lambda/\kappa < 1$. □

Si se cumplen las condiciones del lema anterior, para cualquier $x \in I_0$ la secuencia $x_1 = h(x)$, $x_2 = h^2(x)$, ..., $x_n = h^n(x)$, ... converge al punto fijo de h , x_0 . Aquí está el programita que usé para aproximarme a la β del problema anterior mediante la iteración de h .

```
from math import *
```

```
D = 14          # 2D cm = separación entre puntos
```

```
H = 34.5       # H cm = altura de puntos
```

```
N=10
```

```
x=1
```

```
for n in range(N):
```

```
    y = x*H + 1
```

```
    x = log(y + sqrt(y**2 -1)) / D
```

```
    print('x, y', x , y)
```

```
beta = 1/x
```

```
print('beta =', beta)
```

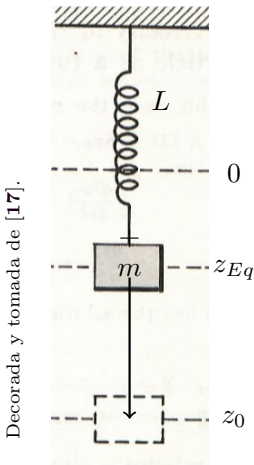

Osciladores lineales

4.1. El oscilador armónico

El prototipo de un oscilador armónico mecánico en la Tierra plana es el de un resorte amarrado al techo por uno de sus extremos y con una masa m colgando de su otro extremo. La masa es libre de moverse a lo largo del eje- z , solamente. Un esquema del oscilador a resorte se muestra en la figura 4.1.

La longitud del resorte distendido (antes de colgarle la masa) es L , que tomamos como el origen de las coordenadas y tomaremos al eje- z dirigido hacia abajo y no como se acostumbra (hacia arriba); así que la dirección negativa es hacia arriba y la positiva es hacia abajo. No lo olviden, en este capítulo el vector unitario $\mathbf{k}$ apunta al piso y el negativo $-\mathbf{k}$ apunta al

Figura 4.1



El resorte distendido (antes de colgarle la masa) tiene longitud L y su extremo es el origen de coordenadas. Al colgarle la masa m el resorte se tensa hasta alcanzar su posición de equilibrio en z_{Eq} . Para echar a andar el oscilador la masa se desplaza a la posición z_0 , desde donde se suelta sin imprimirle ningún impulso inicial.

techo; pero conservamos la orientación positiva del sistema de coordenadas.

La oscilación de la masa m es armónica cuando el resorte tiene una respuesta lineal, lo cual es un buen modelo matemático del resorte cuando los desplazamientos de m son pequeños en comparación con la longitud L del resorte distendido. Esta condición entre las longitudes no es captada por el esquema de la figura 4.1, pero suponemos que el resorte que aparece en el esquema es de *respuesta lineal*.

Un resorte lineal responde con una fuerza $\mathbf{R}$ de magnitud proporcional al desplazamiento de su extremo libre (el otro extremo está amarrado al techo),

$$\mathbf{R} = -\kappa \mathbf{z}.$$

El signo negativo $(-)$ indica que la fuerza va en dirección opuesta al desplazamiento y la constante $\kappa > 0$ es el *módulo de elasticidad*,¹ que es la medida de rigidez del resorte; un resorte aguado tiene κ pequeña. Las unidades son $[\kappa] = \text{dina/cm} = \text{g/s}^2$, donde la unidad de fuerza es una dina = g cm/s^2 .

Cuando la masa está en la posición de equilibrio la suma de fuerzas sobre la masa m es cero

$$\mathbf{R}(z_{Eq}) + mg\mathbf{k} = -\kappa z_{Eq}\mathbf{k} + mg\mathbf{k} \quad \rightarrow \quad z_{Eq} = \frac{mg}{\kappa}.$$

Cuando la masa se encuentra en una posición z arbitraria, la fuerza sobre la masa es

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(z) + mg\mathbf{k} = \kappa(z_{Eq} - z)\mathbf{k},$$

donde se ha usado la condición de equilibrio $z_{Eq} = mg/\kappa$. La ecuación de movimiento para el oscilador resulta de aplicar el principio de acción,

$$m \frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} = \mathbf{F} = \kappa(z_{Eq} - z)\mathbf{k} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2}{dt^2}(z - z_{Eq}) = -\kappa(z - z_{Eq}).$$

Así que nos conviene medir los desplazamientos de la masa a partir de su posición de equilibrio y definimos la nueva variable $\tilde{z} = z - z_{Eq}$. También definimos el parámetro $\omega^2 = \kappa/m$, con

1. **Módulo** (m). Dimensión que convencionalmente se toma como unidad de medida, y más en general, todo lo que sirve de norma o regla.

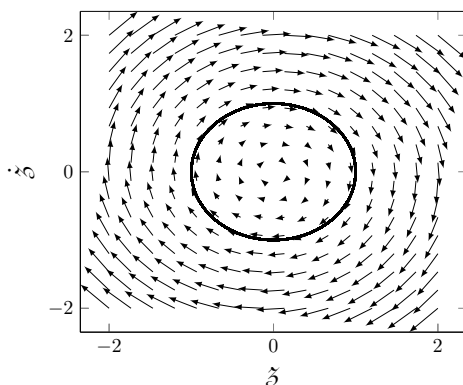


Figura 4.2

unidades $[\omega] = \text{s}^{-1}$, que tendrá el sentido de una velocidad angular. Con las definiciones que hemos introducido, la ecuación de movimiento que nos queda por resolver es

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = -\omega^2 \tilde{z}. \quad (4.1)$$

La ecuación diferencial es muy sencilla y la voy a usar para ilustrar cómo construir la representación en el espacio de fase de una ecuación diferencial lineal de orden $n > 1$, que consiste de un sistema de n ecuaciones de primer orden, organizado como una ecuación vectorial de primer orden en $\mathbb{R}^n$. [4] Nuestro ejemplo es con $n = 2$, que nos lleva a un espacio de fase de dimensión 2. Los que no tengan paciencia se pueden brincar el método (sin remordimientos) e ir directamente a la solución.

Para resolver la ecuación (4.1), empezamos por convertirla en un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{dt} &= \dot{\tilde{z}} \\ \frac{d\dot{\tilde{z}}}{dt} &= -\omega^2 \tilde{z} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}} \\ -\omega^2 \tilde{z} \end{pmatrix} = \mathbf{V}(\mathbf{f}). \quad (4.2)$$

Una gráfica del campo de velocidades $\mathbf{V}(\mathbf{f}) = (\dot{\tilde{z}}, -\omega^2 \tilde{z})^t$ se muestra en la figura 4.2. El origen es un punto singular de $\mathbf{V}$ que no es ni atractor ni repulsor, las velocidades giran-y-giran sin huir ni caer. Este tipo de puntos singulares de un campo de

velocidades $\mathbf{V}$ se llama un *centro*. En la gráfica vemos que las velocidades crecen en magnitud al alejarnos del centro.

El sistema es lineal y esto nos permite escribir el campo de velocidades en la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

que da origen a la ecuación vectorial de primer orden en el espacio de fase,

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \Omega \mathbf{f} \quad \text{con} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

el campo de velocidades es lineal $\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \Omega \mathbf{f}$ y la matriz Ω se conoce como la *matriz jacobiana* del campo. El comportamiento de los sistemas no lineales se estudia en torno a un punto $\mathbf{f}_0$ de equilibrio «linealizando» el sistema mediante la matriz jacobiana en $\mathbf{f}_0$.

Multiplicando la ecuación diferencial para $\mathbf{f}$ por el factor de integración $\exp(-\Omega t)$ se tiene lo siguiente

$$e^{-\Omega t} \frac{d\mathbf{f}}{dt} = e^{-\Omega t} \Omega \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} e^{-\Omega t} \mathbf{f} = 0,$$

que se integra directamente como

$$\mathbf{f}(t) = e^{\Omega t} \mathbf{f}_0$$

donde el vector constante $\mathbf{f}_0$ se determina por las condiciones iniciales impuestas a $\mathbf{f}(0)$.

El problema ahora es calcular la matriz exponencial $\exp(\Omega t)$. Lo haremos a partir de la definición de la función exponencial

$$e^{\Omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Omega t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Omega^n; \quad (4.4)$$

la serie converge en cualquier norma para matrices.

Para evaluar la serie (4.4) hay que calcular las potencias de la matriz Ω , lo cual haremos usando su polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(\Omega - \lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2.$$

En vista de que $p(\Omega) = \Omega^2 + \omega^2 = 0$ se tiene que

$$\Omega^{2n} = (-1)^n \omega^{2n} \quad \text{y que} \quad \Omega^{2n+1} = (-1)^n \omega^{2n} \Omega,$$

con estas potencias de la matriz Ω procedemos a evaluar la serie para la matriz $\exp(\Omega t)$.

La serie (4.4) la separamos en una suma de potencias pares (en la que aparece Ω^{2n}) y otra suma de potencias impares (en la que aparece Ω^{2n+1}). Para las potencias pares de (4.4) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \Omega^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{(2n)!} = \cos(\omega t).$$

Para las potencias impares de la serie (4.4) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \omega^{2n} \Omega = \frac{1}{\omega} \Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\omega} \Omega \sin(\omega t).$$

Reuniendo los resultados para las potencias pares e impares se obtiene la matriz exponencial

$$e^{\Omega t} = \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \Omega \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

La solución es

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = e^{\Omega t} \mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \dot{z}_0 \cos(\omega t) + (\dot{z}_0/\omega) \sin(\omega t) \\ -\dot{z}_0 \omega \sin(\omega t) + \dot{z}_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

con la condición inicial $\mathbf{f}_0 = (\dot{z}_0, \dot{z}_0)^t$. Para cada una de las coordenadas de $\mathbf{f}(t)$ se tiene en forma paramétrica la curva integral del campo de velocidades $\mathbf{V}$ en el espacio de fase (una curva que depende del vector inicial $\mathbf{f}_0$ elegido)

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{z}_0 \cos(\omega t) + (\dot{z}_0/\omega) \sin(\omega t) \\ \dot{z}(t) &= -\dot{z}_0 \omega \sin(\omega t) + \dot{z}_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

En la figura 4.2 se sobrepone la gráfica de una de las curvas integrales (4.5) sobre la gráfica del campo $\mathbf{V}$. Las curvas integrales fluyen circularmente en el sentido del reloj con velocidad angular constante $\omega = \sqrt{\kappa/m}$. La estructura del flujo en el espacio de fase del oscilador armónico es la de un conjunto de círculos concéntricos que, como veremos más adelante, no es *estable*.

El par de ecuaciones para las curvas integrales (4.5) son el resultado del modelo de resorte con respuesta lineal para el movimiento oscilatorio de la masa en la figura 4.1, con condiciones iniciales arbitrarias.

4.2. Amplitud, periodo y frecuencia

Dos de los parámetros habituales para caracterizar el movimiento armónico simple descrito por las curvas integrales (4.5) resultan de escribir la primera de las ecuaciones en la forma

$$\dot{z}(t) = \sqrt{\dot{z}_0^2 + (\dot{z}_0/\omega)^2} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega \dot{z}_0}{\dot{z}_0}, \quad (4.6)$$

expresión que procedemos a demostrar.

Partiendo de las formas exponenciales

$$\begin{aligned} e^{i(\omega t + \phi)} &= \cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi) \\ e^{i\omega t} e^{i\phi} &= \cos \phi \cos(\omega t) - \sin \phi \sin(\omega t) \\ &\quad + i(\sin \phi \cos(\omega t) + \cos \phi \sin(\omega t)), \end{aligned}$$

al igualar las partes imaginarias concluimos que

$$A \sin(\omega t + \phi) = A \sin \phi \cos(\omega t) + A \cos \phi \sin(\omega t),$$

donde A y ϕ se eligen para reproducir la primera de las ecuaciones (4.5); para esto requerimos que

$$A \sin \phi = \dot{z}_0 \quad \text{y} \quad A \cos \phi = \dot{z}_0/\omega,$$

de donde se obtienen los parámetros

$$A = \sqrt{\dot{z}_0^2 + (\dot{z}_0/\omega)^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega \dot{z}_0}{\dot{z}_0}. \quad (4.7)$$

El parámetro A es el máximo desplazamiento de la masa en el oscilador de la figura 4.1 y se le llama la *amplitud* del movimiento; el ejercicio es calcular el máximo de $\dot{z}(t)$ en (4.5) y verificar que es así.

El ángulo ϕ es el *adelanto de fase* del movimiento (adelanto cuando $\phi > 0$; o *fase a secas* si somos precavidos en ver el signo de ϕ). El sentido de la fase se ilustra en la gráfica de la figura 4.3 para $\phi > 0$.

Otro parámetro que caracteriza al movimiento armónico del oscilador a resorte es el tiempo T que le toma a la masa hacer un movimiento de vaivén completo (una *oscilación*); al tiempo de ir-y-venir se le llama el *periodo* T de la oscilación.

En el espacio de fase de la figura 4.2, T es el tiempo que le toma a una órbita hacer un recorrido angular de 2π radianes (un vuelta, sin importar la longitud del recorrido). Esta definición

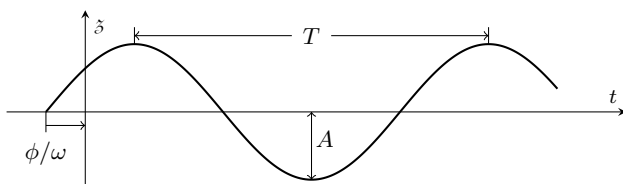


Figura 4.3

aplicada a las ecuaciones (4.5), con $t = T$ el menor tiempo positivo tal que $\mathbf{f}(T) = \mathbf{f}(0)$, es

$$\omega T = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

que es independiente de la amplitud del movimiento (ver en la figura 4.2 cómo crece la magnitud de las velocidades en la gráfica de $\mathbf{V}$ al crecer el radio de la órbita). Si la masa se desplaza poco o mucho, el tiempo que le toma ir-y-venir es el mismo, es el periodo T . Para el periodo no importa cuánto sea la amplitud A .

El periodo T es el tiempo que toma a la masa dar una oscilación completa. El complemento a T es la *frecuencia* f , definida como el número de oscilaciones que se producen en un lapso de tiempo t dado, dividido entre el tiempo t . El número de oscilaciones en el lapso de tiempo t es

$$\frac{t}{T} = \text{número de oscilaciones.}$$

La frecuencia es el número de oscilaciones por unidad de tiempo

$$f = \frac{\text{número de oscilaciones}}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Los cuatro parámetros que hemos descritos son los que se usan habitualmente para caracterizar el movimiento armónico simple. La siguiente tabla los recopila,

Amplitud	A en (4.7)	$[A] = \text{cm}$
Fase	ϕ en (4.7)	$[\phi] = \text{radianes}$
Periodo	$T = 2\pi/\omega$	$[T] = \text{s}$
Frecuencia	$f = \omega/2\pi$	$[f] = \text{s}^{-1}$

El sentido de los parámetros en la tabla se ilustra en la gráfica de la figura 4.3.

4.3. La energía

El modelo matemático para el oscilador de la figura 4.1 se basa en suponer que el resorte tiene respuesta lineal

$$\mathbf{R} = -\kappa \mathbf{z} \mathbf{k},$$

que a grandes desplazamientos $|\mathbf{z}|$ responde con fuerzas de magnitud $\|\mathbf{R}\|$ grande.

La fuerza es conservativa pues $\mathbf{R}$ es el gradiente de la función de energía potencial

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \kappa \mathbf{z}^2,$$

y el enunciado 2.6 (en la página 27) establece que en este caso se conserva la energía total

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{z}}^2 + \frac{1}{2} \kappa \mathbf{z}^2$$

(recordar la definición $\omega^2 = \kappa/m$). Para verificar que E es un invariante se debe demostrar que $dE = 0$ a lo largo de una órbita. De la ecuación en el espacio de fase (4.2) se tiene que

$$d\mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} dt \quad \text{y} \quad d\dot{\mathbf{z}} = -\omega^2 \mathbf{z} dt,$$

así que a lo largo de una órbita el cambio en la energía total es

$$dE = m \dot{\mathbf{z}} d\dot{\mathbf{z}} + \kappa \mathbf{z} d\mathbf{z} = m \dot{\mathbf{z}} (-\omega^2 \mathbf{z} dt) + \omega^2 m \mathbf{z} (\dot{\mathbf{z}} dt) = 0,$$

que demuestra que la energía total es constante a lo largo de una órbita.

La energía total es una constante del movimiento para el oscilador con resorte lineal. En el ejercicio 4.13 se pide sustituir la forma paramétrica (4.5) de una órbita en la fórmula para E y verificar que realmente la dependencia en t se cancela, dejando a la energía E constante.

4.4. El oscilador amortiguado

En la práctica no se encuentra un oscilador a resorte que no disipe algo de su energía durante su vaivén. Puede ser el estira y aprieta que produce calentamiento del resorte o puede ser que la masa se mueve en la atmósfera que es un medio resistivo. En la práctica los osciladores son *amortiguados*. Para reponer la

energía disipada los relojes mecánicos usan una cuerda tensada como fuente de energía mecánica; cuando se acaba la cuerda se para el reloj.

La energía transferida por el movimiento (al metal o al aire) no es mecánica y se pierde para el propio movimiento: con el tiempo la masa en el oscilador a resorte tiende a quedar en reposo, las órbitas del oscilador amortiguado ya no son cerradas y concéntricas; son atraídas hacia el origen.

La observación es que la solución de órbitas cerradas concéntricas (como en una rebanada de cebolla) del oscilador armónico, con una energía E que es invariante, no es *estable*. Es suficiente una disipación menor que cualquier $\epsilon > 0$ para destruir la estructura de órbitas del oscilador armónico; el punto singular del campo de velocidades pasa de ser un centro a ser un *foco estable*. En el argot se dice que las soluciones armónicas no son *hiperbólicas*. Esto explica porque no existen los sistemas conservativos en la Tierra plana y solo los encontramos en el laboratorio o en los ejercicios de un libro de texto.

El modelo que adoptaremos para el oscilador amortiguado es similar al del gallito de bádminton, incluyendo en la aplicación del principio de acción una fuerza de disipación que es proporcional y opuesta a la velocidad del movimiento.

Reponiendo la masa m en el principio de acción para el oscilador armónico (4.1), al incluir la fuerza de disipación, la ecuación se modifica de la siguiente manera

$$m \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = -m\omega^2 \tilde{z} - \beta \dot{\tilde{z}} = -m(\omega^2 \tilde{z} + \frac{\beta}{m} \dot{\tilde{z}}). \quad (4.8)$$

Al tratar el gallito de bádminton, para la resistencia del aire se definió el parámetro $\tau = m/\beta$, que es un tiempo característico de la disipación y ahora introducimos la constante inversa $\nu = 1/2\tau = \beta/2m$ que es una frecuencia, o ritmo de disipación característico, $[\nu] = \text{s}^{-1}$ (el 2 en la definición de ν es por conveniencia algebraica en lo que sigue).

Con esta definición de ν la ecuación (4.8) para el oscilador amortiguado se escribe como sigue,

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = -(\omega^2 \tilde{z} + 2\nu \dot{\tilde{z}}). \quad (4.9)$$

Llevamos esta ecuación de orden 2 al espacio de fase bidimensional usando las siguientes variables,

$$x = \zeta \quad y = \dot{\zeta}.$$

Las ecuaciones para x y y resultan de la ecuación (4.9),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -(\omega^2 x + 2\nu y) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Definimos el vector $\mathbf{f} = (x, y)^t$ (un punto en el espacio de fase) e identificamos el campo de velocidades

$$\mathbf{V}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{f},$$

que es un campo lineal con matriz jacobiana Ω . La ecuación diferencial en el espacio de fase

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \Omega \mathbf{f}$$

se resuelve multiplicando por la izquierda con el factor de integración $\exp(-\Omega t)$, que es una matriz,

$$e^{-\Omega t} \frac{d\mathbf{f}}{dt} = e^{-\Omega t} \Omega \mathbf{f} \rightarrow \frac{d}{dt} e^{-\Omega t} \mathbf{f} = 0.$$

La solución es

$$e^{-\Omega t} \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 \rightarrow \mathbf{f}(t) = e^{\Omega t} \mathbf{f}_0,$$

el vector constante $\mathbf{f}_0$ queda determinado por las condiciones iniciales al tiempo $t = 0$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0$.

El problema de calcular la matriz $\exp(\Omega t)$ lo resolveremos usando un método menos latoso que el que usamos en el caso del oscilador armónico, pero necesitamos aplicar algunos conceptos del álgebra lineal.

Para propósitos de calcular la matriz $\exp(\Omega t)$, aceptaremos que la matriz jacobiana Ω tenga valores y vectores propios complejos, aunque los elementos de Ω sean reales. Los valores propios de Ω son las raíces de su polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(\Omega - \lambda) = \lambda^2 + 2\nu\lambda + \omega^2.$$

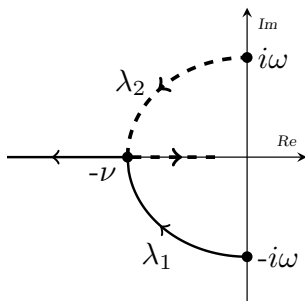


Figura 4.4

Las dos raíces de p son

$$\lambda_s = -\nu + (-1)^s \sqrt{\nu^2 - \omega^2}, \quad s \in \{1, 2\}.$$

Nuestro modelo de oscilador amortiguado distingue tres casos, diferenciados por el valor del discriminante $D = \nu^2 - \omega^2$.

1. El caso $D > 0$, con valores propios λ_s reales y negativos, lo llamamos *muy amortiguado*; ocurre cuando el ritmo de disipación ν es mayor que el ritmo de oscilación ω .
2. El caso $D = 0$, con valores propios λ_s reales, negativos e iguales (el caso degenerado), lo llamamos (*críticamente amortiguado*); ocurre cuando el ritmo de disipación es igual que el ritmo de oscilación, $\nu = \omega$.
3. El caso $D < 0$, con valores propios λ_s complejos (con parte real negativa), lo llamamos *ligeramente amortiguado*; ocurre cuando la disipación va a un ritmo menor que al de la oscilación.

Las designaciones anteriores cobrarán sentido en la próxima sección. A los tres regímenes de amortiguamiento hay que incluir el regimen armónico sin amortiguación, cuando $\nu = 0$.

El movimiento en el plano complejo de λ_1 y λ_2 , los valores propios de Ω , como una función del ritmo de disipación ν , se muestra en la figura 4.4 (para posterior referencia observamos que $\frac{1}{2} \text{tr} \Omega = -\nu$).

Cuando no hay disipación ($\nu = 0$) los valores propios son puramente imaginarios (en $\pm i\omega$) y el régimen es de oscilación armónica, sin amortiguamiento y a frecuencia angular ω . Al introducir disipación a un ritmo $\nu \in (0, \omega)$ el oscilador entra

al régimen ligeramente amortiguado y los valores propios en el plano complejo adquieren una parte real negativa y al crecer $\nu \in (0, \omega)$ se mueven a encontrarse en el punto $-\nu$ del eje real. Justo cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = -\nu$ los valores propios se vuelven puramente reales, lo que ocurre cuando $\nu = \omega$; este punto corresponde al régimen críticamente amortiguado. Cuando $\nu > \omega$, el oscilador entra al régimen muy amortiguado y los valores propios son reales y negativos.

Ahora retomamos el problema de calcular la matriz $\exp(\Omega t)$. Para este propósito, además de los valores propios de Ω requerimos de sus vectores propios $\mathbf{v}_s$, que se calculan a partir de la ecuación

$$(\Omega - \lambda_s)\mathbf{v}_s = 0, \quad s \in \{1, 2\},$$

para los valores de λ_s ya calculados. En realidad lo que nos interesa es que $\mathbf{v}_s$ también es vector propio de la matriz $\exp(\Omega t)$,

$$e^{\Omega t}\mathbf{v}_s = e^{\lambda_s t}\mathbf{v}_s,$$

este resultado nos interesa pues una matriz se determina por su acción sobre una base y la lista $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de vectores propios es una base. El resultado anterior se demuestra en los ejercicios 4.14 y 4.15.

El otro concepto de álgebra lineal que usaremos es que la matriz Ω “es raíz” de su polinomio característico

$$p(\Omega) = \Omega^2 + 2\nu\Omega + \omega^2 = 0 \quad (4.11)$$

por lo que cualquier potencia $n \in \mathbb{N}$ de Ω , Ω^n , es una combinación lineal de la matriz identidad y de la matriz Ω . La exponencial de la matriz jacobiana $\exp(\Omega t)$ es una suma de potencias de Ω por lo que la matriz exponencial tiene la siguiente forma

$$e^{\Omega t} = A(t) + B(t)\Omega$$

y el problema de calcular la matriz $\exp(\Omega t)$ se convierte en el problema de calcular las funciones $A(t)$ y $B(t)$. Por su acción sobre la base de vectores propios $\mathbf{v}_s$

$$e^{\Omega t}\mathbf{v}_s = A(t)\mathbf{v}_s + B(t)\Omega\mathbf{v}_s$$

se tienen (en los casos no degenerados) las siguientes dos ecuaciones

$$e^{\lambda_s t} = A(t) + B(t)\lambda_s, \quad s \in \{1, 2\}.$$

En el caso críticamente amortiguado solo hay una ecuación pues $\lambda_1 = \lambda_2$ y este caso lo trataremos aparte.

Para los casos no degenerados (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$) las soluciones para las funciones A y B son

$$A(t) = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{y} \quad B(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Primero calcularemos la matriz $\exp(\Omega t)$ para las oscilaciones ligeramente amortiguadas, para las que $D = \nu^2 - \omega^2 < 0$ y los valores propios son $\lambda_1 = -\nu - iu$ y $\lambda_2 = -\nu + iu$, con la frecuencia $u = \sqrt{|D|} < \omega$. Sustituyendo estos valores propios en las funciones A y B para luego sustituir a estas en la fórmula para $\exp(\Omega t)$ y así obtener la siguiente matriz

$$e^{\Omega t} = e^{-\nu t} \begin{pmatrix} \cos ut + \frac{\nu}{u} \sin ut & \frac{1}{u} \sin ut \\ -\frac{\omega^2}{u} \sin ut & \cos ut - \frac{\nu}{u} \sin ut \end{pmatrix},$$

para las oscilaciones ligeramente amortiguadas. Las curvas integrales en forma paramétrica se obtienen de aplicar la matriz al vector de condiciones iniciales $\mathbf{f}(t) = \exp(-\Omega t)\mathbf{f}_0$. Para cada una de las coordenadas de $\mathbf{f}$ se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= e^{-\nu t} \left((\cos ut + \frac{\nu}{u} \sin ut) \dot{z}_0 + \frac{1}{u} \sin ut \dot{z}_0 \right) \\ \dot{z}(t) &= e^{-\nu t} \left(-\frac{\omega^2}{u} \sin ut \dot{z}_0 + (\cos ut - \frac{\nu}{u} \sin ut) \dot{z}_0 \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En el límite de no amortiguamiento, $\nu \rightarrow 0$ y $u \rightarrow \omega$, el caso ligeramente amortiguado converge al resultado obtenido para el oscilador armónico. El límite del amortiguamiento ligero al críticamente amortiguado, $u \rightarrow 0$ y $\nu \rightarrow \omega$, es un poquito delicado.

El otro caso no degenerado es el de las oscilaciones muy amortiguadas para las que $D = \nu^2 - \omega^2 > 0$ y los valores propios $\lambda_1 = -\nu - u$ y $\lambda_2 = -\nu + u$ son reales y negativos, pues $0 < u = \sqrt{D} < \nu$.

Los valores propios del caso muy amortiguado se obtienen de los del caso ligeramente amortiguado mediante la sustitución $u \rightarrow iu$. Las ecuaciones de las curvas integrales se obtienen haciendo la misma sustitución en la solución (4.12),

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= e^{-\nu t} \left((\cosh ut + \frac{\nu}{u} \sinh ut) \dot{z}_0 + \frac{1}{u} \sinh ut \dot{z}_0 \right) \\ \dot{z}(t) &= e^{-\nu t} \left(-\frac{\omega^2}{u} \sinh ut \dot{z}_0 + (\cosh ut - \frac{\nu}{u} \sinh ut) \dot{z}_0 \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para resolver el caso críticamente amortiguado, en el que $\omega = \nu$, las cosas son diferentes desde el polinomio característico de la matriz jacobiana en (4.11). Poniendo $\omega = \nu$ en el polinomio (incluyendo los elementos de la matriz Ω) resulta que

$$p(\Omega) = (\Omega + \nu)^2 = 0,$$

por lo que la matriz

$$N = \Omega + \nu = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ -\nu^2 & -\nu \end{pmatrix}$$

es nilpotente, $N^2 = 0$. La gran diferencia en el caso críticamente amortiguado (degenerado) es que la matriz Ω es la suma de una matriz proporcional a la identidad y una matriz nilpotente,

$$\Omega = -\nu + N, \quad \text{con } N^2 = 0.$$

La demostración simple por inducción del ejercicio ?? nos dice que las potencias de Ω son

$$\Omega^n = (-\nu)^n + nN(-\nu)^{n-1}, \quad n > 0,$$

y por supuesto sabemos que $\Omega^0 = 1$.

Con las potencias de la matriz Ω calculamos la matriz exponencial para el caso críticamente amortiguado evaluando la serie que la define

$$\begin{aligned} e^{\Omega t} &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \Omega^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-\nu t)^n}{n!} + N \sum_{n \geq 1} \frac{t^n (-\nu)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-\nu t} (1 - tN) = e^{-\nu t} \begin{pmatrix} 1 + \nu t & t \\ -\nu^2 t & 1 - \nu t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para cada una de las coordenadas de $\mathbf{f}(t) = \exp(\Omega t)\mathbf{f}_0$ se obtiene la forma paramétrica de las curvas integrales para el oscilador críticamente amortiguado

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= e^{-\nu t} ((1 + \nu t)\dot{z}_0 + t\ddot{z}_0) \\ \ddot{z}(t) &= e^{-\nu t} (-\nu^2 t\dot{z}_0 + (1 - \nu^2 t)\ddot{z}_0). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tenemos ya las soluciones para cada uno de los tres casos del modelo (4.9) de oscilador amortiguado, las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14).

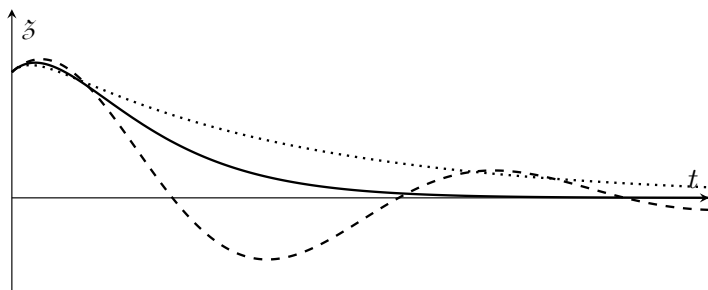


Figura 4.5

4.5. Lineales autónomos bidimensionales

Ahora nos toca reflexionar sobre los resultados obtenidos. Nuestro modelo con resorte de respuesta lineal para el oscilador amortiguado (ver la figura 4.1) es un ejemplo de sistema lineal autónomo con espacio de fase bidimensional que tiene mucho por enseñarnos.

Para mejor apreciar las soluciones del modelo obtenidas en la sección anterior, en la figura 4.5 se grafica el desplazamiento de la masa $z(t)$ en cada uno de los tres regímenes de amortiguamiento: (4.12), (4.13) y (4.14). Se usaron la misma frecuencia angular $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ y condiciones iniciales idénticas para las tres gráficas, con $z_0 > 0$ y $\dot{z}_0 > 0$.

En el régimen muy amortiguado ($\nu > \omega$) podemos imaginar al oscilador de la figura 4.1 inmerso en un líquido muy resistivo, como miel de abeja. Al desplazar la masa y luego dejarla libre, por la resistencia de la miel la masa regresa muy lentamente a su posición de equilibrio. Esto se aprecia en la gráfica con línea de puntos en la figura 4.5, que es la gráfica de $z(t)$ en (4.13). La gráfica tiene una pendiente ($\dot{z}$) pequeña y casi constante a todo lo largo, el regreso de la masa a la posición de equilibrio ($z = 0$) se prolonga por mucho tiempo.

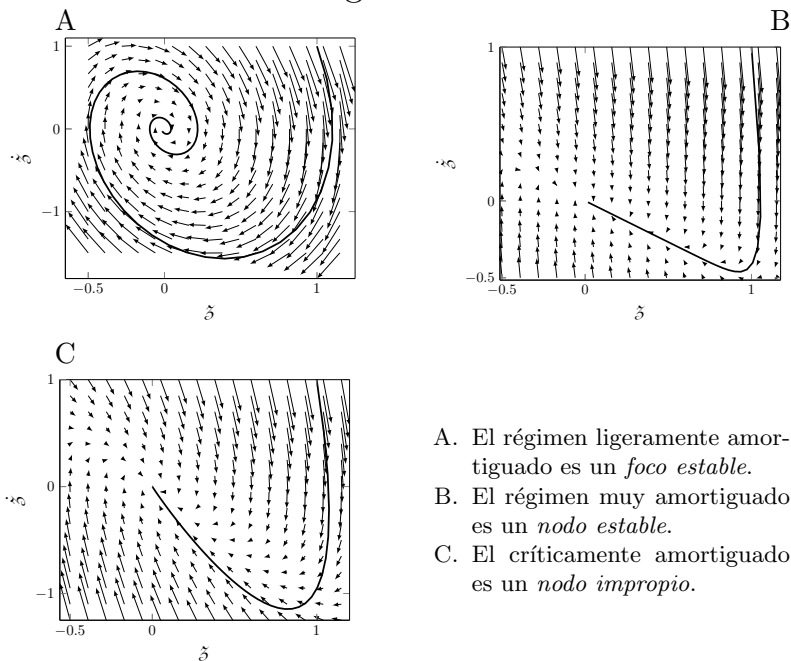
La curva a trazo continuo en la figura 4.5 es la gráfica de $z(t)$ en (4.14), que es la solución en el régimen críticamente amortiguado con $\nu = \omega$. Este es el amortiguamiento óptimo (para los sistemas de suspensión de algunos ingenieros mecánicos) pues la masa regresa lo más rápidamente posible a su posición de equilibrio ($z = 0$) sin presentar oscilaciones.

La solución a $z(t)$ para el régimen ligeramente amortiguado, en (4.12), se grafica con línea de trazos cortos en la figura 4.5. El parámetro de amortiguamiento ($\nu < \omega$) no es lo suficientemente grande para suprimir las oscilaciones por completo, las oscilaciones están presentes y durante el movimiento se van reduciendo en amplitud por efecto del amortiguamiento, hasta que la masa llega a la posición de equilibrio.

Los retratos de fase de los tres regímenes del oscilador amortiguado se muestran en la figura 4.6, para los mismos valores de ω y ν usados en las gráficas de la figura 4.5. A la gráfica del campo de velocidades se sobrepone la curva integral correspondiente a cada una de las soluciones graficadas en la figura 4.5. En los tres casos el origen es un atractor para las órbitas, que es un efecto del amortiguamiento.

A la galería en la figura 4.6 hay que añadir el retrato de fase del oscilador armónico de la figura 4.2 (sin amortiguamiento,

Figura 4.6



- A. El régimen ligeramente amortiguado es un *foco estable*.
- B. El régimen muy amortiguado es un *nodo estable*.
- C. El críticamente amortiguado es un *nodo impropio*.

$\nu = 0$), su punto de equilibrio (el origen) es un centro, que es «indiferente» a las órbitas, pues ni las atrae ni las repele.

4.6. Un diagrama de fases: determinante vs traza

Como un compendio extendido de lo que hemos aprendido del oscilador a resorte, a continuación describiremos el «diagrama de regímenes» (o «diagrama de fases») de los sistemas lineales y autónomos que tiene un espacio de fase bidimensional en general, descritos por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \Omega\mathbf{f}, \quad \text{con una matriz de la forma} \quad \Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

La matriz Ω tiene elementos reales pues $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$ y el origen del espacio de fase, $\mathbf{f} = 0$, es un punto estacionario pues tiene velocidad cero.

El tipo de comportamiento de las órbitas en el espacio de fase está determinado por los valores propios de Ω . Los valores propios son invariantes ante las transformaciones de similaridad de Ω así que los tipos de comportamientos son para las clases de similaridad.

Los coeficientes del polinomio característico de Ω son invariantes de similaridad. Las matrices 2×2 solo tienen dos invariantes: la traza y el determinante. Para la matriz Ω definimos los siguientes invariantes,

$$\sigma = \frac{1}{2}\text{tr } \Omega = \frac{1}{2}(a + d) \quad \text{y} \quad \mu = \det \Omega = ad - bc.$$

El polinomio característico de Ω es

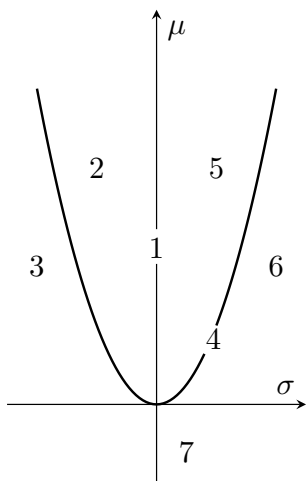
$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\Omega - \lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - 2\sigma\lambda + \mu. \end{aligned}$$

Las raíces de p son los valores propios de Ω ,

$$\lambda_s = \sigma + (-1)^s \sqrt{\sigma^2 - \mu}, \quad s \in \{1, 2\}.$$

El discriminante $D = \sigma^2 - \mu$ es decisivo en la tipificación de los diferentes regímenes del sistema lineal autónomo. Se tienen los siguientes tipos.

1. *Centros.* Para $D < 0$ y $\sigma = 0$ (por lo que $\mu = \det \Omega > 0$), los λ_s son puramente imaginarios: no hay disipación y la energía (o una integral de movimiento equivalente) se conserva. La



1. Centros.
2. Focos estables.
3. Nodos estables.
4. Nodos impropios.
5. Focos inestables.
6. Nodos inestables.
7. Sillas.

Figura 4.7

matriz Ω no es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ y las órbitas son cerradas y girando en torno al origen, que es un *centro*. En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos en el semi-eje $\sigma = 0$ y $\mu > 0$ son los centros.

2. *Focos estables*. Para $D < 0$ y $\sigma < 0$ los λ_s son complejos con parte real negativa. La matriz Ω no es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ y las órbitas son atraídas por el origen, girando en torno al origen. Que la parte real de los λ_s sea negativa ($\text{Re}(\lambda_s) = \sigma < 0$) determina que el origen ($\mathbf{f} = 0$) sea un *atractor*. En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos en el interior izquierdo de la parte convexa de la parábola son los focos estables.
3. *Nodos estables*. Para $D > 0$, $\sigma < 0$ y $\mu = \det \Omega > 0$ los vectores propios λ_s son reales y negativos los dos; se tiene que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. La matriz Ω es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ y el vector propio del autovalor más grande, λ_2 , establece una dirección en el espacio de fase que «jala» las órbitas para llevarlas al origen, que es un atractor. En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos en el lado izquierdo de la parábola y en el semi-plano superior son los nodos estables.
4. *Nodos impropios*. El caso $D = 0$, esto es $\mu = \sigma^2$, es la frontera entre nodos ($D > 0$, $\mu > 0$) y focos ($D < 0$, $\mu > 0$) en

el diagrama de fases; la frontera es la parábola graficada en la figura 4.7. Los valores propios λ_s son reales y degenerados ($\lambda_1 = \lambda_2 = \sigma$), la matriz $\Omega - \lambda_s$ es nilpotente y solo tiene un vector propio para 0 en $\mathbb{R}^2$. Este vector establece una dirección en el espacio de fase que jala las órbitas hacia el origen cuando $\lambda_s < 0$ (el origen es un atractor); pero cuando $\lambda_s > 0$ las órbitas son empujadas en la dirección del vector propio alejándolas del origen (que es un repulsor). En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos que están sobre la parábola son los nodos impropios.

5. *Focos inestables.* Para $D < 0$ y $\sigma > 0$ los λ_s son complejos con parte real positiva. La matriz Ω no es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ y las órbitas son repelidas por el origen, girando en torno al origen. Que la parte real de los λ_s sea positiva ($\text{Re}(\lambda_s) = \sigma > 0$) determina que el origen ($\mathbf{f} = 0$) sea un *repulsor*. En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos en el interior derecho de la parte convexa de la parábola son los focos inestables.
6. *Nodos inestables.* Para $D > 0$, $\sigma > 0$ y $\mu = \det \Omega > 0$ los vectores propios λ_s son reales y positivos los dos; se tiene que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. La matriz Ω es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ y los vector propios establecen direcciones en el espacio de fase que «jalan» las órbitas para llevarlas lejos del origen, que es un repulsor. En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos en el lado derecho de la parábola y en el semi-plano superior son los nodos inestables.
7. *Sillas* (para montar a caballo). Cuando $\mu = \det \Omega < 0$ los dos valores propios λ_s son reales y siempre de signos opuestos ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) para cualquier $\sigma \in \mathbb{R}$. La matriz Ω es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$. El vector propio del autovalor negativo establece una dirección que jala a las orbitas hacia el origen. El vector propio del autovalor positivo establece una dirección que aleja a las órbitas del origen. Con este comportamiento el origen es una silla. En el diagrama de fases en la figura 4.7, los puntos que están en el semi-plano inferior son las sillas.

4.7. Solución general del lineal autónomo 2D

Primero tratamos los casos en que la matriz Ω es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$, quedando excluidos (para tratarlos más adelante) los focos y los nodos impropios.

Para esta primera parte de la sección suponemos que los valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$ de Ω son reales y diferentes y que la lista X de vectores propios de Ω correspondientes a los λ_s ,

$$X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

es una base en el espacio de fase $\mathbb{R}^2$, por lo que $\det X \neq 0$ y la matriz X es invertible. Los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ establecen dos direcciones especiales en el espacio de fase.

La solución $\mathbf{f}(t)$ se expande en la base X como sigue

$$\mathbf{f}(t) = a(t)\mathbf{x}_1 + b(t)\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

y las incógnitas son las funciones $a(t)$ y $b(t)$, que se determinan para que $\mathbf{f}(t)$ sea solución de la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{f}} = \Omega \mathbf{f}$,

$$X \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \Omega X \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = X^{-1} \Omega X \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

La transformación de similaridad de la matriz Ω produce una matriz diagonal. Para comprobarlo, primero calculamos la acción de Ω

$$X^{-1} \Omega X = X^{-1} (\Omega \mathbf{x}_1, \Omega \mathbf{x}_2) = (\lambda_1 X^{-1} \mathbf{x}_1, \lambda_2 X^{-1} \mathbf{x}_2).$$

Para calcular ahora la acción de X^{-1} observamos que

$$X^{-1} X = (X^{-1} \mathbf{x}_1, X^{-1} \mathbf{x}_2) = (\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$X^{-1} \Omega X = (\lambda_1 \boldsymbol{\kappa}_1, \lambda_2 \boldsymbol{\kappa}_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

El resultado es que nos quedan dos ecuaciones diferenciales de orden uno para las variables a y b que están desacopladas,

$$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = X^{-1} \Omega X \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a(t) \\ \lambda_2 b(t) \end{pmatrix}.$$

La solución para las coordenadas de $\mathbf{f}(t)$ en la base X es

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \exp(\lambda_1 t) \\ b_0 \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix},$$

con constantes de integración a_0 y b_0 que son determinadas por condiciones iniciales. La solución que buscamos es

$$\mathbf{f}(t) = U(t)\mathbf{f}_0$$

con matriz de evolución

$$U(t) = X \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} X^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0 = X \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

determinada a partir de los valores y vectores propios de la matriz Ω . Vemos que $U(0) = 1$ y en el ejercicio 4.18 se demuestra que $U(t_1 + t_2) = U(t_2)U(t_1)$.

Cuando la matriz real Ω tiene valores propios complejos (lo cual es el caso cuando el origen del espacio de fase es un foco) es necesario considerar la extensión de Ω de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}^2$. Los vectores complejos $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2$ tienen una parte real y una parte imaginaria $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, con vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. La extensión de Ω a $\mathbb{C}^2$ se define como $\Omega\mathbf{w} = \Omega\mathbf{u} + i\Omega\mathbf{v}$.

Siendo real la matriz Ω , sus valores y vectores propios son el complejo conjugado uno de otro. Los valores propios son

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad \lambda^* = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

con vectores propios

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}^* = \mathbf{u} - i\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$$

En el ejercicio 4.16 se demuestra que la lista de vectores

$$W = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

es una base en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto $\det W \neq 0$ y la matriz W tiene inversa W^{-1} .

El vector $\mathbf{f}(t)$ que describe a la curva integral del campo $\Omega\mathbf{f}$ en el espacio de fase se expande en la base W de la siguiente manera

$$\mathbf{f}(t) = a(t)\mathbf{u} + b(t)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

La ecuación diferencial $\dot{\mathbf{f}} = \Omega \mathbf{f}$ nos da la ecuación

$$W \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \Omega W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = W^{-1} \Omega W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

para las coordenadas de $\mathbf{f}$ en la base W .

A continuación demostramos que la transformación de similitud $W^{-1} \Omega W$ es la composición de una rotación y un re-escalamiento. Del hecho que $\Omega \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$, se tiene que

$$\Omega(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Omega \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}, \\ \Omega \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}. \end{cases}$$

Entonces

$$\Omega W = (\Omega \mathbf{u}, \Omega \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}, \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}).$$

Para calcular la acción de W^{-1} observamos que de la condición $W^{-1}W = (W^{-1}\mathbf{u}, W^{-1}\mathbf{v}) = 1$ se tiene que $W^{-1}\mathbf{u} = \boldsymbol{\kappa}_1 = (1, 0)^t$ y que $W^{-1}\mathbf{v} = \boldsymbol{\kappa}_2 = (0, 1)^t$. Con esto concluimos que

$$\begin{aligned} W^{-1} \Omega W &= (\alpha W^{-1}\mathbf{u} - \beta W^{-1}\mathbf{v}, \alpha W^{-1}\mathbf{v} + \beta W^{-1}\mathbf{u}) \\ &= (\alpha \boldsymbol{\kappa}_1 - \beta \boldsymbol{\kappa}_2, \alpha \boldsymbol{\kappa}_2 + \beta \boldsymbol{\kappa}_1) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en donde hemos expresado a λ en forma polar,

$$\lambda = |\lambda|e^{i\phi} = |\lambda|(\cos \phi + i \sin \phi) = \alpha + i\beta.$$

La ecuación que resulta para las coordenadas de $\mathbf{f}$ en la base W es la siguiente

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Los vectores al lado derecho son ortogonales y esto nos indica que es conveniente introducir coordenadas polares,

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta;$$

con vectores unitarios radial y angular

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares en (4.17) resultan dos ecuaciones diferenciales (para las partes angular y radial) muy simples

$$\dot{\theta} = -\beta \quad \text{y} \quad \dot{r} = r\alpha,$$

con soluciones

$$\theta(t) = -\beta t + \theta_0 \quad \text{y} \quad r(t) = r_0 e^{\alpha t}.$$

Sustituyendo las soluciones $\theta(t)$ y $r(t)$ en las ecuaciones de transformación se obtienen las coordenadas de $\mathbf{f}$ en la base W ,

$$a(t) = r_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta_0) \quad \rightarrow \quad a_0 = r_0 \cos \theta_0$$

$$b(t) = -r_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t - \theta_0) \quad \rightarrow \quad b_0 = r_0 \sin \theta_0.$$

Eliminando los valores iniciales r_0 y θ_0 en favor de a_0 y b_0 se obtiene la solución para las coordenadas de $\mathbf{f}$ en la base W , (4.16),

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, las curvas integrales en el espacio de fase para el caso de valores propios complejos es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= e^{\alpha t} W \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} W \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} W^{-1} \mathbf{f}_0, \end{aligned}$$

donde W es la lista (4.16) de los vectores que son la parte real y la parte imaginaria del vector propio complejo de Ω . En el resultado anterior identificamos la matriz de evolución

$$U(t) = e^{\alpha t} W \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} W^{-1}. \quad (4.18)$$

De nuevo se tiene que $U(0) = 1$ y en el ejercicio 4.18 se demuestra que $U(t_1 + t_2) = U(t_2)U(t_1)$.

El único caso de la matriz Ω que nos queda por tratar es el de valores propios degenerados $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1}{2} \text{tr} \Omega$. La observación relevante es que la matriz $N = \Omega - \lambda$ es nilpotente, $N^2 = 0$, y se tiene entonces que

$$e^{\Omega t} = e^{(N+\lambda)t} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} (1 + Nt),$$

de manera que

$$\mathbf{f}(t) = e^{\lambda t} (1 + Nt) \mathbf{f}_0, \quad \text{con} \quad U(t) = e^{\lambda t} (1 + Nt) \quad (4.19)$$

y $N = \Omega + \frac{1}{2}\text{tr } \Omega$ (pues $\text{tr } N = 0$). Otra vez más se tiene que $U(0) = 1$ y en el ejercicio 4.18 se demuestra que $U(t_1 + t_2) = U(t_2)U(t_1)$.

4.8. El oscilador forzado periódicamente

El modelo de oscilador que hemos estado estudiando es para un resorte de respuesta lineal con parámetros

$$\sigma = \frac{1}{2}\text{tr } \Omega = -\nu \leq 0 \quad \text{y} \quad \mu = \det \Omega = \omega^2 > 0$$

que lo ubican en el cuadrante superior izquierdo del diagrama de fases en la figura 4.7. Por lo tanto, la evolución autónoma de nuestro oscilador (sin acciones externas) ocurre en alguno de los siguientes regímenes. Una fase con oscilaciones armónicas no amortiguadas, la solución (4.5), que tiene al origen del espacio de fase como un centro; una fase de oscilaciones ligeramente amortiguadas, la solución (4.12), con el origen siendo un foco estable; la fase de supresión crítica de las oscilaciones, la solución (4.14), con el origen siendo un nodo impropio; o bien en una fase con supresión muy amortiguada de las oscilaciones, la solución (4.13), con el origen siendo un nodo estable.

Los valores propios de la matriz jacobiana Ω son los que determinan el régimen del oscilador autónomo. En esta sección estudiaremos cómo una acción externa que oscila senoidalmente modifica el comportamiento del oscilador autónomo.

En la EDO del modelo (4.9), además de la fuerza lineal de reposición $\mathbf{R} = -\kappa\mathbf{z}\mathbf{k}$ (que es la causa de la oscilación) y de la fuerza de amortiguamiento $-\beta\dot{\mathbf{z}}\mathbf{k}$ (que es la causa de la estabilidad), se considerará un agente externo actuando sobre la masa m mediante una fuerza de magnitud F y que oscila en intensidad a la frecuencia ω

$$\mathbf{F}(t) = F \cos \omega t \mathbf{k},$$

la condición de periodicidad es que

$$\mathbf{F}(t + T) = \mathbf{F}(t) \quad \text{para } T = 2\pi/\omega.$$

El modelo establece que sin importar cómo se mueva el oscilador, el agente externo le imprime la fuerza $\mathbf{F}$ en todo momento; esto equivale a suponer que el agente es una fuente inagotable e «imperturbable» de energía que domina al oscilador. Ejemplos serían las fuerzas producidas por un temblor de

tierra o por un viento que sopla fuerte (que sacude una ventana mal-cerrada sin parar): ni al viento ni a la tierra los podemos alterar (detener) en su acción.

Para las tres fuerzas consideradas el principio de acción nos da la ecuación de movimiento,

$$m \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = -m\omega^2 \tilde{z} - \beta \dot{\tilde{z}} + F \cos \omega t$$

que re-escribimos en la forma

$$\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{z} + 2\nu \dot{\tilde{z}} = \alpha \cos \omega t. \quad (4.20)$$

El parámetro $\alpha = F/m$ es una aceleración, en las unidades $[\alpha] = \text{cm/s}^2$; el parámetro ω_0 es la frecuencia “natural” del oscilador autónomo no amortiguado y ω es la frecuencia a la que cambia la intensidad de la fuerza externa. Añadí el índice “0” a ω (que ahora es ω_0) para enfatizar la diferencia entre ω ($= \omega_0$) y ω .

En ausencia de la acción de la fuerza externa ($\alpha = 0$), la ecuación diferencial (4.20) se simplifica a la ecuación homogénea (4.9), que es lineal. Entonces la solución $\tilde{z}(t)$ a (4.20) es la suma de una solución $\tilde{z}_h(t)$ a la ecuación homogénea (que ya resolvimos para todos los regímenes posibles) y de una solución particular $\tilde{z}_p(t)$

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}_h(t) + \tilde{z}_p(t).$$

La ecuación diferencial (4.20) tiene coeficientes constantes y el término inhomogéneo es una función coseno, así que podemos aplicar el método de los coeficientes indeterminados[4] con el *ansatz*²

$$\tilde{z}_p(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

El *ansatz* es aplicable al caso de un oscilador amortiguado en el que $\nu > 0$. La falla del *ansatz* en el caso del oscilador no amortiguado en resonancia es que $\nu = 0$ y $\omega = \omega_0$, resultando en que el *ansatz* mismo es una solución a la ecuación homogénea y no puede reproducir el término inhomogéneo. El oscilador

-
2. Un *ansatz* es una conjetura que ayuda a encontrar la solución a una (o varias) ecuación(es) que describen un problema físico o matemático. La validez del *ansatz* se justifica a posteriori.

no amortiguado forzado en resonancia se trata en la siguiente sección y se propone un *ansatz* diferente para la solución particular.

Los coeficientes c_1 y c_2 en el *ansatz* se determinan sustituyendo $\tilde{z}_p$ en (4.20) y luego comparando con el término inhomogéneo. De la comparación resultan los coeficientes

$$c_1 = \frac{\alpha(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{2\alpha\nu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2}.$$

La identidad trigonométrica que se demuestra en el ejercicio 4.17 nos permite escribir la solución particular con una amplitud y una fase definidas,

$$\begin{aligned} \tilde{z}_p(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi), \\ \tan \phi &= \frac{2\nu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

La solución $\tilde{z}(t)$ para el oscilador amortiguado forzado es la suma de la solución particular $\tilde{z}_p(t)$ y una de las soluciones $\tilde{z}_h(t)$ a la homogénea, las que fueron graficadas en la figura 4.5.

La solución a la EDO homogénea (en cualquiera de los regímenes) se «apaga» después de un tiempo breve y a esta parte de la solución se le conoce como la *respuesta transitoria* del oscilador forzado, que está determinada por las condiciones iniciales del oscilador. La contribución a $\tilde{z}(t)$ de la solución particular nunca se apaga y se le conoce como la *respuesta estacionaria* del oscilador.

En las aplicaciones la que importa es la respuesta estacionaria, que son las *oscilaciones forzadas* de frecuencia ω y con un retraso de fase ϕ .

Por consideraciones energéticas (ver el ejercicio 4.13) conviene caracterizar la respuesta estacionaria por el cuadrado de la amplitud de la oscilación forzada sostenida,

$$A^2 = \frac{\alpha^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2}. \tag{4.22}$$

Tres gráficas de A^2 en función de la frecuencia ω de la fuerza externa que maneja al oscilador se muestran en la figura 4.8 para los valores de amortiguamiento $\nu \in \{0.2\omega_0, 0.3\omega_0, 0.4\omega_0\}$.

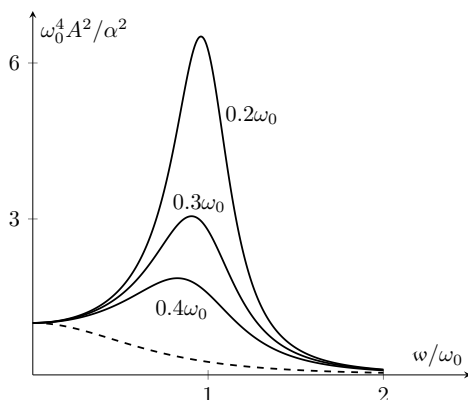


Figura 4.8

Para amortiguamientos muy ligeros ($\nu < \omega_0/\sqrt{2}$) en el ejercicio 4.19 se demuestra que la amplitud de la oscilación forzada tiene un máximo a la frecuencia

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\nu^2} < \omega_0,$$

que se le conoce como la *frecuencia de resonancia*. Debido al amortiguamiento $\nu > 0$, la frecuencia de resonancia ω_R es menor que la frecuencia natural ω_0 del oscilador no amortiguado.

Para amortiguamientos $\nu \geq \omega_0/\sqrt{2} \approx 0.707 \omega_0$ el máximo se traslada a $\omega = 0$ y la amplitud es una función monótona decreciente de ω , deja de presentarse el fenómeno de resonancia. Para los valores de $\nu \geq \omega_0/\sqrt{2}$ el medio resulta demasiado resistivo para que el agente externo pueda mantener una oscilación forzada de una amplitud considerable; en el régimen estacionario todo el trabajo realizado por el agente externo se disipa al medio resistivo y solo una pequeña fracción permanece almacenada en el resorte.

La gráfica a trazos cortos en la figura 4.8 es del cuadrado de la amplitud (4.22) para el oscilador críticamente amortiguado con $\nu = \omega_0 > \omega_0/\sqrt{2}$. La gráfica no muestra el efecto de resonancia.

4.9. Forzamiento no amortiguado

En la práctica no existen osciladores no amortiguados, pero sí existen los osciladores con amortiguamientos muy pequeños para los que un modelo de forzamiento no amortiguado es una buena aproximación; al menos durante el intervalo de tiempo en el que el oscilador no deja el régimen lineal, pues hasta puede el oscilador no amortiguado llegar a romperse cuando la frecuencia externa se sintoniza a su frecuencia natural propia; el ejemplo legendario es el cantante que rompe una copa sosteniendo un «*do de pecho*» durante varios segundos, haciendo vibrar a la copa «*in crescendo*» hasta hacerla saltar en pedazos.³

En el oscilador amortiguado la oscilación propia se amortigua y al cabo de un tiempo se apaga, constituyendo una respuesta transitoria que ya expusimos en las gráficas de la figura 4.5. Una vez en el régimen estacionario solo se sostiene la oscilación forzada de frecuencia ω y la respuesta del oscilador amortiguado forzado se estaciona en (4.21), único fenómeno posible y un tanto «insulso».

En el oscilador no amortiguado la resonancia propia (de frecuencia natural ω_0) se sostiene (la oscilación nunca se apaga así que no hay un transitorio) y coexiste en interacción permanentemente con la oscilación externa. Dependiendo de cómo sea la interacción de las dos oscilaciones aparecen fenómenos diversos, aunque se trate de una interacción lineal simple entre oscilaciones. Los tres casos sobresalientes se grafican en la figura 4.9.

A estudiar la interacción de las oscilaciones en el oscilador no amortiguado forzado nos enfocamos a continuación. Interesa describir el comportamiento de las soluciones en función de la frecuencia ω del término de forzamiento, en especial cuando se aproxima a la frecuencia ω_0 natural del oscilador; yendo a *resonancia*, que ocurre cuando $\omega = \omega_0$.

-
3. Se requieren unos 140 dB sostenidos durante 2 o 3 segundos para romper una copa de vidrio de buena calidad. [10] «...in 2005 the Discovery Channel [...] recruiting rock singer and vocal coach Jaime Vendera [...] tried 12 wine glasses before stumbling on the lucky one that splintered at the blast of his mighty pipes. [...] proof that an unassisted voice can indeed shatter glass was captured on video. Vendera's glass-breaking wail registered at 105 decibels—almost as loud as a jackhammer.»[16]

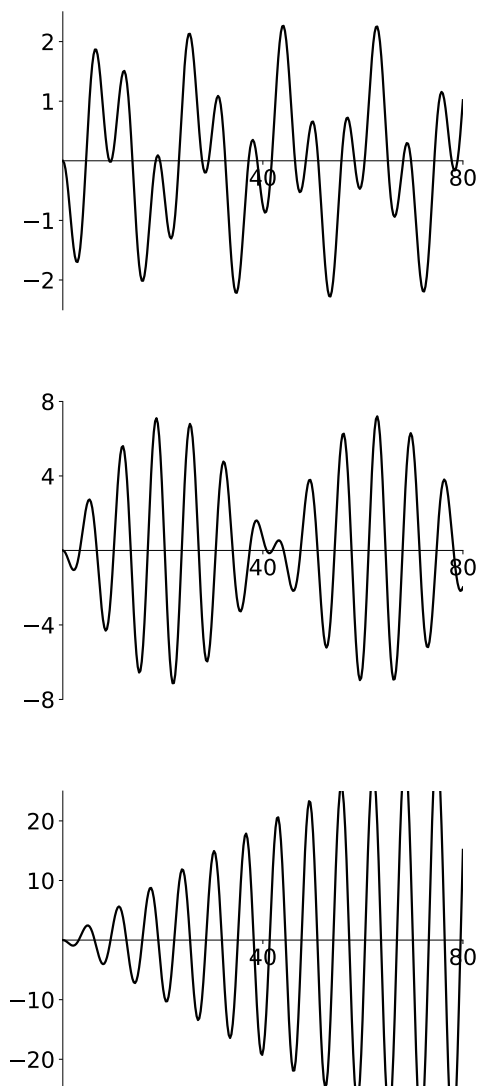


Figura 4.9.

Respuesta para forzamiento lejos de resonancia, próximo a resonancia y muy próximo a resonancia.

La ecuación para el oscilador no amortiguado forzado se obtiene de (4.20) poniendo el amortiguamiento $\nu = 0$,

$$\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \tilde{z} = \alpha \cos \omega t \quad (4.23)$$

y como unidad de tiempo hemos escogido $\omega_0 = 1$, lo que hace adimensionales a las variables ω y t ; las variables $\tilde{z}$ y α adquieren unidades de distancia, $[\tilde{z}] = [\alpha] = \text{cm}$. Para recuperar las unidades de tiempo arbitrarias hay que hacer los remplazos $\omega \rightarrow \omega/\omega_0$, $t \rightarrow \omega_0 t$ y $\alpha \rightarrow \alpha/\omega_0^2$.

Primero resolvemos (4.23) para el caso fuera de resonancia, $\omega \neq \omega_0$; la experiencia nos será útil para luego resolver (4.23) en el caso de un forzamiento en resonancia, $\omega = \omega_0$.

4.10. Forzamiento fuera de resonancia

Para resolver la EDO (4.23) nos conviene considerar la variable compleja z con parte real $\text{Re}(z) = \tilde{z}$ que es solución de la ecuación

$$\ddot{z} + z = \alpha e^{i\omega t}, \quad \text{con } \alpha \text{ real.} \quad (4.24)$$

La solución a (4.23) que buscamos es $\tilde{z}(t) = \text{Re}(z(t))$, la parte real de la solución a (4.24).

Lo forma compleja (4.24) de la ecuación (4.23) tiene ventajas por las propiedades simples de la función exponencial. Introduciendo el cambio de variable $z = u + ce^{i\omega t}$ en (4.24) se obtiene la siguiente ecuación para la variable compleja u

$$\ddot{u} + u = \left(\alpha - c(1 - \omega^2) \right) e^{i\omega t}.$$

Si escogemos la constante c como

$$c = \frac{\alpha}{1 - \omega^2}, \quad \omega^2 \neq 1 \text{ (fuera de resonancia),}$$

entonces la variable u satisface la ecuación homogénea

$$\ddot{u} + u = 0,$$

que tiene soluciones de la forma $e^{i\gamma t}$ con γ las raíces de la ecuación cuadrática

$$-\gamma^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = \pm 1.$$

La solución general a la homogénea es

$$u(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it},$$

y entonces la solución a (4.24) para un forzamiento fuera de resonancia ($\omega^2 \neq 1$) es

$$z(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + \frac{\alpha}{1 - \omega^2} e^{i\omega t}, \quad (4.25)$$

en donde los primeros dos términos son las oscilaciones propias (naturales) del oscilador (la solución a la homogénea) y el tercer término es la oscilación introducida por el forzamiento (una solución particular). Las constantes de integración c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones iniciales.

Para evitar el efecto de condiciones iniciales arbitrarias en la respuesta compleja (4.25) y apreciar «limpiamente» la interacción entre el forzamiento y las oscilaciones naturales se adoptan condiciones iniciales nulas,

$$z(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 + c_2 + \frac{\alpha}{1 - \omega^2} = 0,$$

$$\dot{z}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 - c_2 + \frac{\omega\alpha}{1 - \omega^2} = 0.$$

Las constantes de integración que resultan para condiciones iniciales nulas son

$$c_1 = \frac{\alpha}{2(\omega - 1)} \quad \text{y} \quad c_2 = -\frac{\alpha}{2(\omega + 1)}.$$

Sustituyendo estas constantes de integración en la solución (4.25) se obtiene la respuesta compleja

$$z(t) = \frac{\alpha}{\omega^2 - 1} (\cos t + i\omega \sin t - e^{i\omega t}).$$

La parte real de $z(t)$ nos da la respuesta al problema original (4.23),

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{Z}(t) = \frac{1}{\omega^2 - 1} (\cos t - \cos \omega t), \quad \text{fuera de resonancia.} \quad (4.26)$$

La respuesta del oscilador al forzamiento depende de la frecuencia ω del forzamiento y vemos en la respuesta (4.26) que la oscilación natural (de frecuencia $\omega_0 = 1$) se sostiene sin amortiguarse. Las dos oscilaciones están en «interacción» permanentemente. Cuando las dos tienen el mismo signo las oscilaciones se refuerzan (interferencia constructiva) y cuando tienen signos opuestas las oscilaciones se cancelan entre sí (interferencia destructiva).

Tres casos típicos de la interferencia de las oscilaciones en la respuesta $\mathcal{Z}(t)$ se grafican en la figura 4.9; en las gráficas el eje de las abscisas es $\omega_0 t$ y el eje de las ordenadas es $\mathcal{Z}(t)/\alpha$.

En el caso en que la frecuencia de forzamiento ω está lejos de la frecuencia natural (de resonancia) $\omega_0 = 1$ la interacción de las oscilaciones en la respuesta $\mathcal{Z}(t)$ tiene un comportamiento de apariencia irregular; como se ilustra en la primera de las gráficas en la figura 4.9 para la frecuencia $\omega = 0.35\omega_0$.

Cuando la frecuencia de forzamiento ω es próxima a la frecuencia de resonancia la respuesta $\mathcal{Z}(t)$ muestra un patrón regular consistente en una secuencia de *pulsaciones*, paquetes de oscilaciones regulares llamados «*bips*»: la respuesta (4.26) cerca de resonancia es una secuencia de pitidos *bip-bip-bip-...*, todos de la misma duración. La interferencia de las oscilaciones en la respuesta $\mathcal{Z}(t)$ se alterna entre destructiva y constructiva de una manera regular. Este tipo de respuesta se ilustra en la segunda de las gráficas de la figura 4.9 para la frecuencia de forzamiento $\omega = 0.85\omega_0$.

Nuestro último ejemplo de interacción de las oscilaciones en el oscilador forzado no-amortiguado es el caso en que la frecuencia de forzamiento ω es muy próxima a la frecuencia de resonancia ω_0 ; llamado forzamiento *casi resonante*. La tercera gráfica de la figura 4.9 es la respuesta (4.26) para una frecuencia casi resonante $\omega = 0.975\omega_0$ en la que se observa que la amplitud de las oscilaciones en la respuesta $\mathcal{Z}(t)$ crece linealmente con t ,

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{Z}(t) \approx \frac{1}{2} t \sin t, \quad \text{casi resonancia } (\omega \approx 1);$$

lo cual se demuestra en el ejercicio 4.20.

El caso de forzamiento resonante (sin el «casi») se trata en detalle en la sección siguiente.

4.11. Forzamiento en resonancia

En resonancia el forzamiento tiene frecuencia $\omega = \omega_0 = 1$ y la EDO (4.23) para la respuesta del oscilador no-amortiguado forzado es

$$\ddot{\mathcal{Z}} + \mathcal{Z} = \alpha \cos t \quad \rightarrow \quad \ddot{z} + z = \alpha e^{it}, \quad (4.27)$$

donde recordamos que $\mathcal{Z}(t) = \text{Re}(z(t))$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

La respuesta fuera de resonancia (4.26) calculada en la sección anterior no nos da la solución a la EDO (4.27) pues al

poner $\omega = 1$ en (4.26) nos queda un $0/0$ indefinido. Revisando el cambio de variable $z \rightarrow u$ con $\omega = 1$ constatamos que las dos variables (u y z) satisfacen la misma EDO (4.27) y no obtenemos ninguna ventaja con la nueva variable. Requerimos de un cambio de variable diferente.

Cuando tratamos en la sección anterior el ejemplo de un forzamiento casi-resonante vimos que la respuesta se aproxima a una oscilación con una amplitud que crece linealmente con el tiempo t . Esta observación nos sugiere intentar el cambio de variable $z = u + cte^{it}$.

Introduciendo el cambio de variable en la EDO compleja (4.27) se obtiene la siguiente EDO para la variable compleja u ,

$$\ddot{u} + u = (\alpha - 2ic)e^{it}.$$

Escogemos la constante c para tener que

$$\alpha - 2ic = 0 \quad \rightarrow \quad c = -\frac{i}{2}\alpha,$$

de manera que u es solución de la homogénea y

$$z(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} - \frac{i}{2}\alpha t e^{it}. \quad (4.28)$$

Las constantes de integración c_1 y c_2 se eligen para tener condiciones iniciales nulas,

$$z(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = -c_1,$$

$$\dot{z}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = c_2 + \frac{\alpha}{2} \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{\alpha}{4} = -c_2.$$

Sustituyendo las constantes c_1 y c_2 en la solución (4.28) se obtiene la respuesta compleja para condiciones iniciales nulas,

$$z(t) = \frac{i}{2}\alpha(\sin t - t \cos t) + \frac{\alpha}{2}t \sin t.$$

La parte real de $z(t)$ es la respuesta $\mathcal{J}(t)$ del oscilador forzado en resonancia ($\omega = 1$),

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{J}(t) = \frac{1}{2}t \sin t.$$

No deja de sorprender que la respuesta del oscilador no-amortiguado forzado en resonancia crezca ilimitadamente a pesar de que el forzamiento sea acotado y cero en promedio: lo mismo «empuja» que «jala». Este crecimiento ilimitado de la respuesta es «peligroso», por ejemplo, cuando las vibraciones

del suelo durante un terremoto están en resonancia con las oscilaciones naturales (propias) de un edificio, que lo pueden llevar a sacudirse cada vez más violentamente hasta llegar a una situación catastrófica.

4.12. Ejercicios

4.13. Sustituir la solución (4.5) en la energía total del oscilador no amortiguado

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z(t)^2$$

para verificar que es una constante,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2,$$

donde A es la amplitud de la oscilación definida en (4.7); esta dependencia de la energía en la amplitud es típica de las oscilaciones armónicas no amortiguadas.

4.14. Sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valores propios de la matriz Ω . La lista de vectores propios $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$, entonces

$$\Omega\mathbf{v}_1 = c\Omega\mathbf{v}_2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1\mathbf{v}_1 = c\lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$$

que es una contradicción pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\mathbf{v}_2$ no es nulo. $\square$

4.15. Sea λ valor propio de la matriz Ω con vector propio $\mathbf{v}$, entonces $\exp(\Omega t)\mathbf{v} = \exp(\lambda t)\mathbf{v}$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción se demuestra que $\Omega^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$: para $n = 1$ es válida y luego $\Omega^{n+1}\mathbf{v} = \Omega^n\Omega\mathbf{v} = \lambda^n\Omega\mathbf{v}$.

Por definición de la función exponencial se tiene que

$$e^{\Omega t}\mathbf{v} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \Omega^n \mathbf{v} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{v} = e^{\lambda t} \mathbf{v},$$

lo cual es válido pues la serie converge de manera absoluta (en cualquier norma). $\square$

4.16. Sean $\lambda = \alpha + i\beta$ (con $\beta \neq 0$) y $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ un valor y un vector propio complejos de la matriz real Ω . La lista de vectores $W = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ expande $\mathbb{R}^2 = \text{span}(W)$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$, con $c \in \mathbb{R}$ por necesidad. Se tendría que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + ic\mathbf{u} = (1 + ic)\mathbf{u}$, y ya que $\Omega\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, resultaría que

$$\Omega(1 + ic)\mathbf{u} = \lambda(1 + ic)\mathbf{u} \rightarrow \Omega\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

que es una contradicción pues $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

4.17. Demostrar la identidad

$$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t = A \cos(\omega t - \phi) \quad \begin{cases} A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \tan \phi = c_2/c_1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Se usa la identidad

$$\cos(\omega t - \phi) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t} e^{-i\phi}) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi$$

en la que se identifican los coeficientes como sigue

$$c_1 = A \cos \phi \quad \text{y} \quad c_2 = A \sin \phi.$$

La amplitud y la fase quedan determinados como $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\tan \phi = c_2/c_1$. $\square$

4.18. Las matrices de evolución de un sistema lineal bidimensional autónomo calculadas en (4.15), (4.18) y (4.19) tienen la propiedad $U(t_1 + t_2) = U(t_2)U(t_1)$.

DEMOSTRACIÓN. • Para la matriz en (4.15),

$$\begin{aligned} U(t_2)U(t_1) &= X \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_2} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t_2} \end{pmatrix} X^{-1} X \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t_1} \end{pmatrix} X^{-1} \\ &= X \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t_1+t_2)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t_1+t_2)} \end{pmatrix} X^{-1} = U(t_1 + t_2). \end{aligned}$$

• Para la matriz en (4.18),

$$U(t_2)U(t_1) = e^{\alpha(t_1+t_2)} W \begin{pmatrix} \cos \beta t_2 & \sin \beta t_2 \\ -\sin \beta t_2 & \cos \beta t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t_1 & \sin \beta t_1 \\ -\sin \beta t_1 & \cos \beta t_1 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

En la multiplicación de las matrices aparecen las identidades

$$\cos \beta(t_1 + t_2) = \cos \beta t_1 \cos \beta t_2 - \sin \beta t_1 \sin \beta t_2$$

$$\sin \beta(t_1 + t_2) = \cos \beta t_1 \sin \beta t_2 + \sin \beta t_1 \cos \beta t_2$$

con las que se demuestra que $U(t_1 + t_2) = U(t_2)U(t_1)$.

- Para la matriz en (4.19),

$$\begin{aligned} U(t_2)U(t_1) &= e^{\lambda(t_1+t_2)}(1+Nt_2)(1+Nt_1) \\ &= e^{\lambda(t_1+t_2)}(1+N(t_1+t_2)) = U(t_1+t_2), \end{aligned}$$

pues $N^2 = 0$. □

4.19. Demostrar (a) que el cuadrado de la amplitud de las oscilaciones forzadas (4.22) tiene un máximo en la frecuencia

$$\omega_R = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - 2\nu^2}, & \nu < \omega_0/\sqrt{2}, \\ 0, & \nu \geq \omega_0/\sqrt{2} \end{cases}$$

y (b) que el máximo está dado por

$$A_R^2 = \begin{cases} \alpha^2/(4\nu^2(\omega_0^2 - \nu^2)), & \nu < \omega_0/\sqrt{2}, \\ \alpha^2/\omega_0^4, & \nu \geq \omega_0/\sqrt{2}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. (a) La derivada del cuadrado de la amplitud (4.22) tiene ceros en las frecuencias

$$\omega_1 = 0 \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\nu^2}$$

en el caso en que $\nu < \omega_0/\sqrt{2}$. La frecuencia ω_1 es un mínimo de $A^2(\omega)$ y ω_2 es el máximo. En el caso en que $\nu \geq \omega_0/\sqrt{2}$ la derivada de (4.22) solo tiene un cero en $\omega = 0$ que es un máximo.

(b) Los valores máximos de $A^2(\omega)$ se obtienen sustituyendo en la fórmula (4.22) los valores de $\omega = \omega_2$ y $\omega = 0$ en cada caso. □

4.20. La respuesta forzada $\mathcal{Z}(t)$ en (4.26) del oscilador lineal no-amortiguado tiene oscilaciones con una amplitud que crece aproximadamente de manera lineal en t ,

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{Z}(t) \approx \frac{1}{2} t \sin t,$$

en el caso de un forzamiento casi resonante de frecuencia $\omega = 1 + \delta\omega$, con $|\delta\omega| \ll 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sustituyendo los primeros dos términos de la siguiente expansión en potencias de $\delta\omega t$,

$$\begin{aligned}\cos \omega t &= \cos(t + \delta\omega t) = \cos t \cos(\delta\omega t) - \sin t \sin(\delta\omega t) \\ &\approx \cos t - (\omega - 1)t \sin t + \mathcal{O}(\delta\omega t)^2,\end{aligned}$$

en (4.26) se obtiene la aproximación anunciada para $z(t)$. $\square$

El problema de los dos cuerpos

5.1. El cielo que nos cobija de noche

El estudio del cielo nocturno tiene un lugar sobresaliente en todas las culturas antiguas. En las necesidades mundanas, los agricultores y pecuarios (los chiveros) sincronizaron su labor al estado del cielo mediante calendarios que determinan cuándo plantar cultivos y cruzar a los animales. En las necesidades del espíritu, se identificaron constelaciones estelares que hacían *celestial* lo relativo a leyendas y mitologías.

Los chinos fueron de los primeros astrónomos en documentar la actividad estelar, y dejaron un número importante de observatorios pre-telescópicos, como el antiguo observatorio de Pekín construido en el siglo XIII y equipado con una gran colección de instrumentos «modernos», tales como una esfera armilar (modelo mecánico del cosmos desde la perspectiva terrestre), un cuadrante, un sextante y un teodolito.

En Meso-América los mayas del período clásico (2,000 a.C. hasta 250 d.C.) desarrollaron la astronomía pre-telescópica más precisa del mundo que les permitió hacer predicciones de muy largo plazo (de miles de años). La sociedad maya se organizaba en base a múltiples ciclos astronómicos armonizados con el ciclo mayor, llamado *la cuenta larga*, de 5,200 Tunes (un ciclo de 5,125.36 años). El calendario moderno armoniza el ciclo día-noche (de 24 horas) con el periodo de la órbita alrededor del Sol con la ayuda de los años bisiestos, entre otros ajustes menores, para mantener una sincronía entre días y años.

La astronomía maya estudió la Luna, los planetas, la Vía Láctea, el Sol y otros muchos cuerpos y fenómenos celestiales. Hicieron cálculos exactos de los periodos de Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno; calcularon con exactitud, los periodos de la Luna, el Sol y de estrellas como las Pléyades (conocidas en mi pueblo como *las siete cabritas*), que los mayas llamaban Tzab-ek (estrella cascabel). La civilización maya dejó muchos observatorios astronómicos desparramados por todo Meso-América.

Fue costumbre en la civilización maya celebrar el inicio de un nuevo ciclo astronómico con festividades. Nosotros festejamos (con pitos y «cuetes») la llegada de *El Año Nuevo*.

Ya muy recientemente en Europa, tras la muerte del astrónomo pre-telescópico Tycho Brahe (1546–1601), Kepler (1571–1630) tuvo acceso a los datos que durante años Tycho Brahe había ido recolectando sobre las órbitas de los planetas. Estudiando esos datos Kepler dedujo las órbitas planetarias. Los datos recolectados se centraban en Marte, que tiene, junto con Plutón, la órbita elíptica más pronunciada del sistema solar (con una excentricidad de apenas 0.093; en contraste, la órbita terrestre es casi circular). Fue así que pudo Kepler darse cuenta que las órbitas planetarias son elípticas, conclusión que se conoce como la primera ley de Kepler.

Demostraremos que de los axiomas mecánicos, complementados con el modelo de Newton (1642–1726) para la fuerza gravitacional, derivan esta y otras dos leyes planetarias, que fueron deducidas de los datos astronómicos por Kepler y que son conocidas como las *tres leyes de Kepler*.

5.2. Construcción de un modelo

El sistema mecánico a considerar consiste de dos partículas que se mueven en el «espacio vacío» (solo existen ellas dos) bajo la acción de las fuerzas que ejercen mutuamente, una sobre la otra. La situación se esquematiza en la figura 5.1.

Una de las partículas tiene masa m_1 y se le ubica mediante el vector $\mathbf{r}_1$, la otra tiene masa m_2 y su vector de posición es $\mathbf{r}_2$. El vector que traslada de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

La fuerza que la masa m_1 ejerce sobre la masa m_2 la designamos $\mathbf{F}_2$ y la que m_2 ejerce sobre m_1 es $\mathbf{F}_1$. El principio

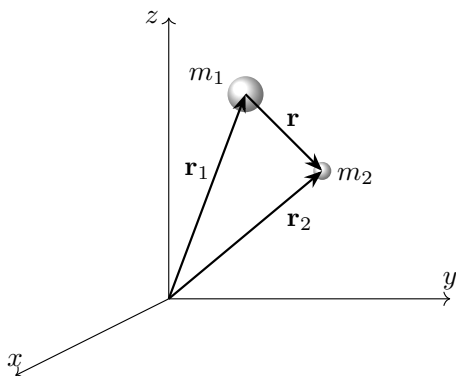


Figura 5.1

anti-bootstrap de la mecánica impone la condición de que las dos fuerzas sumen a cero,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0. \quad (5.1)$$

Entonces las fuerzas de interacción que son admisibles tienen que ser colineales, de igual magnitud $F = \|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\|$ y en sentidos opuestos; para evitar interacciones que produzcan un torque (tampoco queremos torques gratis) supondremos que las fuerzas son colineales al vector $\mathbf{r}$, el que traslada de m_1 a m_2 . Se tiene, por ejemplo, que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = F(r) \hat{\mathbf{r}} =: \mathbf{F}, \quad (5.2)$$

suponiendo que la magnitud F solo es función de la distancia entre las partículas, $r = \|\mathbf{r}\|$, y no de la orientación “global” del vector $\mathbf{r}$. El vector unitario es $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

Las posibles formas de acción a distancia entre dos cuerpos que cumplen con el principio anti-bootstrap (5.1) se ilustran en la figura 5.2. A la izquierda es el caso de fuerzas atractivas y que no producen un torque, así es el modelo para la fuerza de atracción gravitacional. En la figura al lado derecho las fuerzas de acción a distancia suman a cero, como lo requiere (5.1), pero producen un torque y esto no lo queremos.

Hay dos posibilidades para la acción mutua a distancia que cumplen con la condición anti-bootstrap (5.2) sin producir torque. Una posibilidad es que las fuerzas sean opuestas en sentido

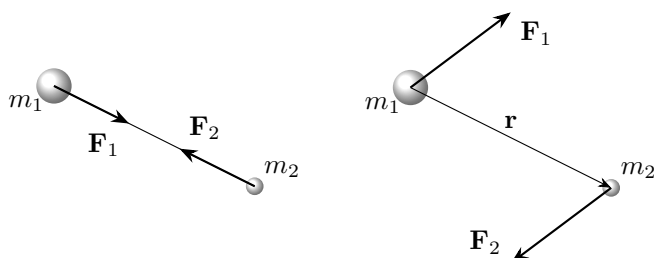


Figura 5.2

de atracción como se eligió en (5.2); esto es lo que ocurre con la fuerza gravitacional y con la fuerza eléctrica entre cargas de signos opuestos.

La otra posibilidad es invertir los signos de las fuerzas en (5.2), lo que corresponde a un sentido de repulsión; esto es lo que ocurre con la interacción eléctrica entre cargas del mismo signo. Nosotros trataremos la fuerza de atracción gravitacional, tal como en (5.2).

Desde el punto de vista físico, la acción (por fuerzas, como se definió en el capítulo 2) a distancia entre dos cuerpos es una hipótesis absurda¹ (pensado en el espacio como «un vacío»), pero como modelo matemático de la atracción gravitacional funciona muy bien y es ampliamente utilizada para describir con precisión los movimientos de los cuerpos del sistema solar; como los planetas con sus lunas o los asteroides.

A pesar de su gran utilidad, la idea de que el Sol y la Tierra ejercen una fuerza mutua a la distancia, através del espacio vacío y de manera instantánea es insensata; considerando que la distancia entre los dos es mayor a los 150 millones de km. La luz, que es lo que viaja a la mayor velocidad en el espacio libre tarda, desde que es emitida por el Sol, más de 8 minutos en llegar a la Tierra.

1. En la opinión del mismo Newton, «That one body may act upon another at a distance through a vacuum without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one another, is to me so great an absurdity that, I believe, no man who has in philosophic matters a competent faculty of thinking could ever fall into it.»

Aplicando el principio de acción de las fuerzas (5.2) a cada uno de los dos cuerpos obtenemos las EDO siguientes,

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_1 = F \hat{\mathbf{r}} \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_2 = -F \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

que están acopladas pues $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Aquí (casi²) termina la construcción del modelo y el problema que sigue es resolver el sistema de ecuaciones (5.3) para los vectores $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$.

5.3. Cambio de variables

El lado derecho de las ecuaciones (5.3) que estamos por resolver tienen signos opuestos y entonces se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = 0,$$

y es conveniente introducir la nueva variable

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total de los dos cuerpos. El vector $\mathbf{R}$ es la posición del *centro de masa* de los dos cuerpos y es la combinación convexa de los vectores de posición de cada uno de los cuerpos. El centro de masa se ubica en un punto del segmento que conceta las posiciones de los dos cuerpos, quedando más próximo al cuerpo de mayor masa.

El centro de masa se mueve a velocidad constante, ya que

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$$

El principio de inercia nos permite adoptar un sistema de referencia en el que el centro de masa esté en reposo, con $\mathbf{R} = \text{cte}$. Con esto tenemos resuelta ya la mitad del problema.

Los planetas en el sistema solar tienen masas mucho más pequeñas que la masa $M_\odot$ del Sol. El planeta más grande en el sistema solar es Jupiter y tiene una masa de $9 \times 10^{-4} M_\odot$. La Tierra es bastante más pequeña que Jupiter, con una masa de $3 \times 10^{-6} M_\odot$. Si en el modelo que estamos construyendo el Sol

2. Todavía falta especificar la magnitud F como una función de $r = \|\mathbf{r}\|$.

es $m_1 = M_\odot$ y un planeta es $m_2 \ll M_\odot$, entonces resulta que son válidas las aproximaciones

$$\frac{m_1}{M} = \frac{M_\odot}{m_2 + M_\odot} \approx 1 \quad \text{y} \quad \frac{m_2}{M} = \frac{m_2}{m_2 + M_\odot} \approx 0.$$

Por lo que el centro de masa $\mathbf{R}$ se ubica en el centro del Sol,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{r}_1.$$

Así que por lo dicho anteriormente, el modelo aplicado al sistema solar considera al Sol en reposo y en el origen de coordenadas.

Para terminar con el cambio de variables, la otra nueva variable la obtenemos de la diferencia de las ecuaciones (5.3)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{1}{m_2} \mathbf{F} - \frac{1}{m_1} \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{F}, \quad (5.4)$$

donde se definieron las cantidades

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Con las definiciones de las nuevas variables $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$ el problema que nos queda por resolver, la EDO (5.4) para $\mathbf{r}$ desacoplada de $\mathbf{R}$, es equivalente al problema de una partícula de *masa reducida* μ , en la posición $\mathbf{r}$ y moviéndose en un campo de fuerza central $-\mathbf{F} = -F(r)\hat{\mathbf{r}}$, que es un campo centrípeto (jala hacia el centro).

Con las nuevas variables $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$ hemos reducido el problema de dos cuerpos al problema de un solo cuerpo en un campo de fuerza central atrayente.

5.4. Conservación del momento angular

Entre los enunciados demostrados en el capítulo 2 vimos que en un campo de fuerza central el momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ es una constante de movimiento. Esto lo verificamos de nuevo a continuación aplicando por la izquierda la operación $\mathbf{r} \times$ a la EDO (5.4)

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0,$$

donde $\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}}$, $d_t(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times d_t \mathbf{p}$ (pues $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0$) y $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ (pues el campo es central, $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{r}}$).

La conclusión es que siendo una constante del movimiento el vector

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{cte},$$

entonces los vectores de posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ permanecen sobre el plano que es ortogonal al vector de momento angular $\mathbf{L}$.

La conservación de $\mathbf{L}$ nos ha reducido el problema de resolver la EDO (5.4) de 3 a 2 dimensiones. Para proceder ponemos el eje- z del sistema de referencia en la dirección del vector $\mathbf{L} = L\mathbf{k}$ y escribir la ecuación anterior en la forma

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{L}{\mu} \mathbf{k} = \text{cte}, \quad (5.5)$$

por lo que $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ son vectores que radican en el plano x - y , y que escribimos de la siguiente manera

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix},$$

con las coordenadas $z = 0$ y $\dot{z} = 0$ (la trayectoria nunca se sale del plano).

Ahora las incógnitas son $x(t)$ y $y(t)$, que requieren de dos EDO. La primera deriva de la ley (5.5) de conservación del momento angular escribiendo

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathbf{k}.$$

La sustituimos en (5.5) para obtener la primera de dos EDO,

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \frac{L}{\mu}. \quad (5.6)$$

Esta ecuación tiene un sentido geométrico que exponemos en la sección a continuación.

5.5. La segunda ley de Kepler

Usaremos a partir de aquí coordenadas polares, r y θ , para describir las trayectorias,

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta.$$

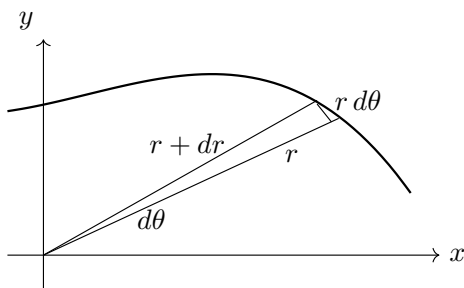


Figura 5.3

La transformación para las velocidades es la siguiente

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad \text{y} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta.$$

Haciendo en (5.6) el cambio de coordenadas cartesianas, x y y , a coordenadas polares resulta la EDO siguiente

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{\mu}. \quad (5.7)$$

En la figura 5.3 se muestra el área que «barre» el radio $r(\theta)$ al avanzar en la trayectoria del ángulo θ al ángulo $\theta + d\theta$. El área barrida tiene la forma de un triángulo con un ángulo $d\theta$ muy agudo y de área

$$dA = \frac{1}{2} r(r d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}.$$

Comparando con (5.7) concluimos que el movimiento en un campo de fuerza central avanza barriendo una área que crece a velocidad constante,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{cte} > 0. \quad (5.8)$$

Este resultado es llamado la segunda ley de Kepler, que dice

El radio vector que une el Sol a un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales. [2a. ley de Kepler].

5.6. Conservación de la energía

Para avanzar en la solución del problema de dos cuerpos es necesario ser más específico sobre la fuerza $\mathbf{F}$ de interacción en el sistema de EDO (5.3).

El modelo gravitacional de Newton propone que la fuerza mutua ejercida entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados la distancia r es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia,

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad G = 6.6743 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}. \quad (5.9)$$

La constante de proporcionalidad G es universal, se aplica la misma G a la manzana que cae del árbol que a la Luna que orbita alrededor de la Tierra.

En el ejercicio 5.21 se verifica que la fuerza de atracción gravitacional de Newton en el principio de acción (5.4),

$$-\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

constituye un campo gradiente que deriva de la función potencial

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{\gamma}{r}, \quad \text{con } \gamma = G m_1 m_2.$$

En el capítulo 2 hemos demostrado que la energía total para un campo gradiente,

$$E = T(\dot{\mathbf{r}}) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\gamma}{r},$$

es una constante de movimiento. En coordenadas polares r y θ se tiene que

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{y entonces} \quad E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\gamma}{r}.$$

Usando (5.7) para eliminar la velocidad angular $\dot{\theta}$ se obtiene una ecuación para la constante E que solo involucra a r y $\dot{r}$,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r} = \text{cte},$$

de la cual se obtiene la EDO

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\gamma}{r} \right)} \quad (5.10)$$

que puede ser integrada directamente. La solución $r = r(t)$ se sustituye luego en la EDO

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (\text{que resulta de (5.7)}) \quad (5.11)$$

para obtener $\theta = \theta(t)$.

Estamos a un paso (solo técnico) de resolver el problema de los dos cuerpos, pero no vamos a proceder a determinar la forma paramétrica de las órbitas. Quedaremos contentos con obtener una ecuación $r = r(\theta)$ para las órbitas.

5.7. La primera ley de Kepler

Para obtener la ecuación $r = r(\theta)$ de las órbitas, de las ecuaciones (5.10) y (5.11) se obtiene la EDO

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{r\sqrt{2\mu E\left(r^2 - \frac{L^2}{2\mu E} + \frac{\gamma}{E}r\right)}}$$

que procedemos a integrar,

$$\theta + \theta_0 = L \int \frac{dr}{r\sqrt{2\mu E\left(r^2 - \frac{L^2}{2\mu E} + \frac{\gamma}{E}r\right)}},$$

donde θ_0 es una constante de integración. Mediante el cambio de variable $u = r^{-1}$ la integral toma la forma siguiente

$$\theta + \theta_0 = -L \int \frac{du}{\sqrt{c + bu - au^2}}$$

donde las constantes son

$$a = L^2, \quad b = 2\mu\gamma, \quad c = 2\mu E.$$

La integral la encontramos en alguna de tantas tablas de integrales accesibles através de Internet, por ejemplo en (la reina de todas las tablas) [9, p.94]. Así llegamos a que

$$\theta + \theta_0 = \sin^{-1} \frac{1 - u L^2/(\mu\gamma)}{\sqrt{1 + 2EL^2/(\mu\gamma^2)}}.$$

Restituyendo $u = r^{-1}$ y definiendo las constantes

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\gamma^2}}, \quad \rho = \frac{L^2}{\mu\gamma}, \quad \theta_0 = \pi \quad (5.12)$$

obtenemos la fórmula siguiente para las órbitas,

$$r = \frac{\rho}{1 + e \sin \theta}. \quad (5.13)$$

En la fórmula anterior la constante ρ solo fija las unidades de distancia, mientras que la constante e determina el tipo de

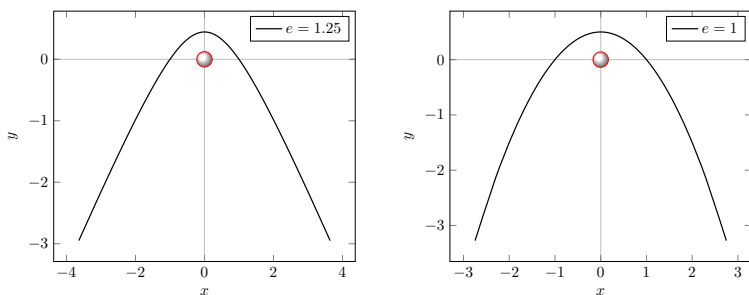


Figura 5.4

órbita. Los cuatro tipos de órbita que describe la fórmula (5.13) según del valor de e se listan en la tabla siguiente.

$e > 1$	una hipérbola	$E > 0$
$e = 1$	una parábola	$E = 0$
$0 < e < 1$	una elipse	$E < 0$
$e = 0$	un círculo	$E = -(1/2)\mu(\gamma/L)^2$

La relación entre e y E la da la definición en (5.12).

En la figura 5.4 se muestran los dos tipos de órbitas que no son acotadas, la gráfica usa unidades de distancia en las que $\rho = 1$. La trayectoria a la izquierda es una hipérbola con energía positiva $E > 0$; la trayectoria a la derecha es una parábola de energía $E = 0$. La canica en el origen de coordenadas de las gráficas en la figura 5.4 es un Sol hipotético.

El modelo gravitacional de Newton describe correctamente, para energías negativas $E < 0$, las órbitas elípticas de los planetas en el sistema solar. El parámetro $e \in (0, 1)$ es una medida de la excentricidad de la elipse. En la figura 5.5 se grafica una órbita elíptica hipotética, con una excentricidad $e = 0.25$ —que es demasiado grande para un planeta del sistema solar— y en unidades en las que $\rho = 1$. La canica en el origen de coordenadas en la figura 5.5 es un «Sol» que se ubica en uno de los focos de la elipse.

Este resultado del modelo fue establecido por primera vez para el sistema solar a partir de los datos recolectados por el astrónomo pre-telescópico Tycho Brahe y es conocido como la primera ley de Kepler.

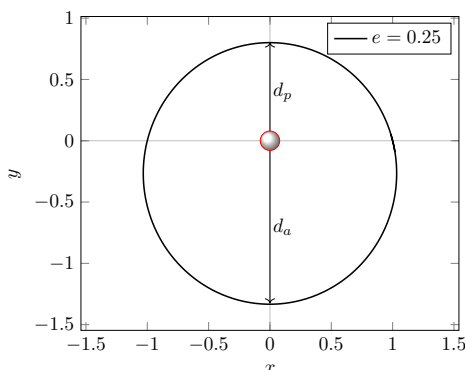


Figura 5.5

Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse. [1era ley de Kepler]

El punto de la órbita elíptica en que el «planeta» se encuentra más alejado del «Sol» se llama el *afelio* y a la distancia la designamos como d_a en la figura 5.5. La Tierra se encuentra en el afelio en uno de los primeros días del mes de julio. Del valor máximo para r en la fórmula (5.13) se tiene para la distancia del afelio

$$d_a = \frac{\rho}{1 - e}. \quad (5.14)$$

El punto de la órbita elíptica en que el «planeta» se encuentra más cercano al «Sol» se llama el *perihelio* y a la distancia la designamos como d_p en la figura 5.5. La Tierra se encuentra en el perihelio en uno de los primeros días del mes de enero. Del valor mínimo para r en la fórmula (5.13) se tiene para la distancia del perihelio

$$d_p = \frac{\rho}{1 + e}. \quad (5.15)$$

Si designamos como a el semi-eje mayor de una órbita elíptica, se tiene que

$$a = \frac{1}{2}(d_a + d_p) = \frac{\rho}{1 - e^2}. \quad (5.16)$$

5.8. Nota bene

Es necesaria una aclaración sobre la aseveración de que el modelo que hemos construido (el de Newton) reproduce las primeras dos leyes de Kepler pues las leyes se enuncian tomando al Sol en reposo, como punto de referencia (el origen de coordenadas) para medir ángulos y distancias y ubicado en el foco de las órbitas elípticas. En el modelo las cosas no son así.

En el modelo el centro de masa de los dos cuerpos, ubicado en $\mathbf{R}$, es el que está en reposo y tomado como el origen de coordenadas, $\mathbf{R} = 0$. La situación de cada uno de los cuerpos en el modelo es descrita por el cambio inverso de variables

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{M} \mathbf{r} = -\frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{M} \mathbf{r} = \frac{m_1}{M} \mathbf{r},$$

donde, recordemos, $\mathbf{r}_1$ y m_1 corresponden al Sol y $\mathbf{r}_2$ y m_2 corresponden al planeta (ver la figura 5.1). Lo que nos salva es el hecho de que el Sol es mucho más masivo que los planetas. Esta observación fue hecha en la sección 5.3, en la página 116, donde justificamos las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{M} &\approx 1 &\rightarrow &\mathbf{r}_2 \approx \mathbf{r}, \\ \frac{m_2}{M} &\approx 0 &\rightarrow &\mathbf{r}_1 \approx 0. \end{aligned}$$

Es gracias al gran tamaño del Sol que la variable $\mathbf{r}_1$ lo ubica (con muy buena aproximación) en reposo en el origen de coordenadas y que el planeta es ubicado en su órbita por el vector $\mathbf{r}$. Así pues, el modelo da cuenta de las primeras dos leyes de Kepler.

5.9. La tercera ley de Kepler

Las leyes de Kepler establecieron el canon del movimiento planetario y fueron la base para hacer avanzar la investigación astronómica. Por ejemplo, Urano se desvía del canon en la longitud de su eclíptica, de su distancia al Sol y de su radio vector; para explicar las desviaciones observadas en el movimiento de Urano, se conjeturó la existencia de Neptuno como el causante de las desviaciones, antes de haber sido observado (aunque hay registro de que Galileo lo observó con su telescopio «pecaminoso», pero no supo que era un planeta del sistema

solar). Los astrónomos apuntaron sus telescopios y confirmaron la conjetura: *habemus Neptunus*.

Una “norma” planetaria «fácil» de verificar en los datos recolectados es la tercera ley de Kepler.

El cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semi-eje mayor de su órbita elíptica. [3a ley de Kepler]

El modelo de Newton predice que el área que barre el radio vector que va del Sol al planeta en su órbita crece a velocidad constante, y puede por tanto calcularse como el área de la elipse $A = \pi ab$ (a es el semi-eje mayor y b el semi-eje menor) dividida por el periodo T . La velocidad de área está dada por (5.8) y entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{L}{2\mu} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\mu}{L} A = \frac{2\mu}{L} \pi ab.$$

El semi-eje menor³ es $b = a\sqrt{1 - e^2}$, por lo que

$$T^2 = \left(\frac{2\mu}{L}\right)^2 \pi^2 a^4 (1 - e^2).$$

De (5.16) se tiene que $a(1 - e^2) = \rho = L^2/(\mu\gamma)$ y al sustituir en la ecuación anterior se tiene que

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\gamma} a^3 = \frac{4\pi^2}{G(M_\odot + m_2)} a^3 \approx \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3,$$

y la constante de proporcionalidad es (aproximadamente) la misma para todos los planetas, sin importar su masa m_2 . Este resultado es la tercera ley de Kepler.

Según esta ley, mientras más alejado del Sol está un planeta más tarda en completar un periodo. La Tierra tarda un año en dar la vuelta al Sol, Marte se lleva casi dos años (687 días terrestres) en dar la vuelta; Jupiter se lleva 11.86 años y Urano se lleva 84 años. Mercurio, el planeta más cercano al Sol, completa una vuelta en solo 88 días terrestres.

A fin de cuentas el modelo gravitacional de Newton, que consiste en la fuerza de atracción en (5.9), reproduce correctamente las tres leyes de Kepler para el sistema solar partiendo de

3. Consultar el fascículo sobre *La Elipse* en la Wikipedia.

los tres principios de la mecánica que enunciamos en el capítulo 2. El punto flaco en el modelo de Newton es la «insensatez física» de la acción de fuerzas a la distancia. Muchos años después (como unos 200, o más) Einstein propuso una alternativa que elimina el «punto flaco» de Newton.

5.10. Ejercicios

5.21. La fuerza de atracción gravitacional de Newton

$$-\mathbf{F} = -\frac{\gamma}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{con } \gamma = Gm_1m_2,$$

es un campo gradiente que deriva de la función potencial

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para determinar $\nabla V(r)$ se requieren las siguientes derivadas parciales,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{x}{r^3}.$$

De manera similar se calculan las derivadas parciales siguientes

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}.$$

Reuniendo las tres derivadas se tiene que

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Concluimos que

$$-\nabla \left(-\frac{\gamma}{r} \right) = -\frac{\gamma}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}. \quad \square$$

Sistemas de referencia en rotación

6.1. Motivación

Los tres principios de la mecánica que hemos enunciado en el capítulo 2 solo son válidos en un sistema inercial y nuestra hipótesis de trabajo ha sido que un sistema inercial existe. Cualquier otro sistema que se mueva a velocidad constante con respecto a ese sistema inercial también es inercial.

Para detectar si un sistema es inercial se coloca un cuerpo en reposo con libertad de moverse y si permanece en reposo el sistema es inercial; en un sistema inercial no actúan sobre los cuerpos las llamadas *fuerzas ficticias*, que ejercen su acción sin la necesidad de un agente externo que las aplique.

Cuando vamos en un carro por la carretera, al entrar en una curva aparece una fuerza centrífuga que actúa sobre nosotros, empujándonos hacia el lado exterior de la curva y vemos que el puñado de monedas que estaban en reposo, pero sueltas, sobre el tablero se corren a un extremo «por sí mismas», sin que nadie las empuje; el centro en torno al cual gira la curva tiene una acción repulsiva «*ficticia*» sobre nosotros (aunque la llamen «fuerza ficticia», para nosotros y para los objetos que vamos en el carro es muy real).

Esa fuerza centrífuga que actúa al interior del carro no es aparente para alguien que observa correr al carro sobre la carretera desde el exterior; para el observador externo lo que es aparente es que el carro cuando va en la curva lleva una *aceleración centrípeta*, tal como fue descrita en el capítulo 1 (recordar que geoméricamente la aceleración tiene dos componentes como se explicó en (1.5) y en el párrafo siguiente (en la página 9)).

Otro sistema no inercial es la Tierra que gira en torno a su propio eje de rotación. Aunque en condiciones restringidas (distancias cortas y tiempos breves) la aproximación de Tierra plana es válida, en «realidad» (para el «alien» que nos vigila desde el espacio exterior) la Tierra gira en torno a su eje; pero nosotros que habitamos la biosfera somos objetos de acción de las fuerzas ficticias que «existen» sobre la Tierra,

1. La fuerza centrífuga y
2. La fuerza de Coriolis.

Estas fuerzas nos pasan inadvertidas (en las condiciones restringidas) por lo leves que son (la velocidad angular de la Tierra es apenas de 7.29×10^{-5} radianes/segundo).¹ El péndulo de Foucault es un instrumento «fino» que detecta la acción de la fuerza de Coriolis después de muchos minutos de estar oscilando (distancias cortas pero tiempos largos). Los sistemas de referencia en rotación son fundamentales en meteorología para calcular el movimiento de las masas de aire por diferencias de presión en la biosfera, que rota con la Tierra.

Lo normal en nuestro habitat complejo son los sistemas no-inerciales y es importante (en especial para los ingenieros dedicados a la aeronáutica, a los ferrocarriles o a los vehículos autónomos, que corren o vuelan) responder a la pregunta ¿cómo aplicar los tres principios de la mecánica (inercia, acción y anti-bootstrap) en un sistema no-inercial?

No daremos una respuesta general en profundidad, solo trataremos *muy detalladamente* el caso de los sistemas de referencia que están en rotación respecto a un sistema inercial.

En los sistemas que rotan aparecen tres fuerzas ficticias en general, las dos ya mencionadas (la centrífuga y la de Coriolis) y la fuerza de Euler, que actúa en los sistemas que rotan a velocidad angular no-constante.

Se dice que la fuerza de Euler no existe sobre la Tierra, pero en realidad el eje de rotación de la Tierra precesa y la velocidad angular no es constante, pero la precesión del eje de la Tierra es un movimiento extremadamente lento; ¡tarda casi 26,000 años en completar una vuelta!, realizando más de

1. Consultar el fascículo sobre *Rotación de la Tierra* en la Wikipedia.

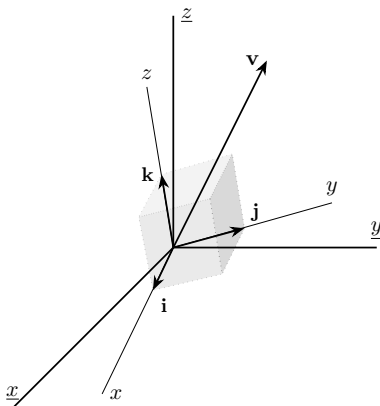


Figura 6.1

1,300 bucles de nutación.² Para efectos de fuerzas ficticias en la biosfera es como si el movimiento de precesión no existiera.

Los sistemas de referencia en rotación constituyen el caso relevante para la Tierra que gira en torno a su eje a velocidad angular constante. Trataremos la mecánica en la Tierra ignorando su movimiento orbital alrededor del Sol; nuestra simplificación será que la Tierra gira en torno a su eje, suponiendo que está en reposo (sin desplazarse) en el «espacio exterior», que tomaremos como el sistema inercial de partida. La base de nuestro modelo para la Tierra en rotación está esquematizada en la figura 6.1.

6.2. Uno está fijo y el otro rota

Tratamos con dos sistemas de referencia. El fijo es el sistema $\mathcal{I}$, que es inercial como hipótesis de trabajo; el que pivota es el sistema $\mathcal{O}$; que es donde habita el observador, para él el sistema $\mathcal{O}$ está fijo. La situación entre $\mathcal{I}$ y $\mathcal{O}$ se esquematiza en la figura 6.1.

Los vectores de la base estándar en $\mathcal{O}$ son $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, que para el sistema $\mathcal{I}$ son funciones del tiempo t , como consecuencia del pivoteo de $\mathcal{O}$ respecto de $\mathcal{I}$. El tiempo t corre igual en los dos sistemas.

2. La precesión del eje de rotación de la Tierra es provocado por las fuerzas gravitacionales del Sol y la Luna.

El pivoteo consiste de rotaciones de $\mathcal{O}$ en torno al origen de coordenadas que comparte con $\mathcal{I}$. Las rotaciones son las transformaciones que no invierten y que preservan el producto interior euclidiano y por tanto preservan la norma. Aunque los vectores de base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ son funciones del tiempo vistos desde $\mathcal{I}$, se tiene que $\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle = 1$ y lo mismo para $\langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle = 1$ y para $\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = 1$, para cualquier tiempo t .

Al ser preservada la norma de los vectores por el pivoteo, la razón de cambio (la velocidad de traslación) producido por el pivoteo en los vectores de la base son ortogonales a los vectores mismos,

$$\left\langle \mathbf{i}, \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \mathbf{j}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right\rangle = 0. \quad (6.1)$$

La restricción (6.1) de preservar la norma requiere que la acción del pivoteo sobre los vectores de la base sea de la forma

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = c_3\mathbf{k} + c_4\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = c_5\mathbf{i} + c_6\mathbf{j}, \quad (6.2)$$

quedando el efecto de la rotación “contenido” en los seis coeficientes c_i de las expansiones anteriores.

Las rotaciones también preservan los ángulos entre los vectores, así que (aún desde $\mathcal{I}$) para todo t se tiene que los vectores de la base se mantienen siendo ortogonales

$$\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle = 0, \quad \text{en } \mathcal{I} \text{ para todo } t.$$

Esto impone condiciones adicionales a la razón de cambio (la velocidad de traslación) producida por el pivoteo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\mathbf{i}}{dt}, \mathbf{j} \right\rangle &= - \left\langle \mathbf{i}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right\rangle, & \left\langle \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \mathbf{k} \right\rangle &= - \left\langle \mathbf{j}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{d\mathbf{k}}{dt}, \mathbf{i} \right\rangle &= - \left\langle \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{i}}{dt} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sustituyendo las velocidades en (6.2) en estas condiciones se tiene que

$$c_1 = -c_4, \quad c_3 = -c_6, \quad c_2 = -c_5.$$

La preservación del producto interior euclidiano solo deja a tres de los seis coeficientes c_i como independientes. La razón de

cambio (la velocidad) producida por el pivoteo en los vectores de la base son como sigue,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = c_3\mathbf{k} - c_1\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -c_2\mathbf{i} - c_3\mathbf{j}.$$

En lugar de los coeficientes c_1 , c_2 y c_3 ; para caracterizar el pivoteo introducimos el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k},$$

con nuevos coeficientes ω_i y requiriendo del vector $\boldsymbol{\omega}$ que

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad (6.4)$$

de manera que la razón de cambio (la velocidad) producida por el pivoteo es la transformación (lineal) $\mathbf{e} \mapsto \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$, la misma para cada uno de los vectores en la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathcal{O}$.

Además las restricciones impuestas por la preservación de la norma (6.1) y la preservación de los ángulos (6.3) son aparentes en (6.4), pues

$$\left\langle \mathbf{e}, \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right\rangle = \langle \mathbf{e}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \rangle = 0$$

y

$$\left\langle \mathbf{e}', \frac{d\mathbf{e}}{dt} \right\rangle = \langle \mathbf{e}', \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}' \times \boldsymbol{\omega} \rangle = - \left\langle \mathbf{e}, \frac{d\mathbf{e}'}{dt} \right\rangle,$$

esta última por la propiedad cíclica del «triple producto escalar»³ y que $\mathbf{e}' \times \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'$. Algunos dicen que el vector $\boldsymbol{\omega}$ es *un rotor* (un generador de rotaciones).

Para identificar las coordenadas del vector $\boldsymbol{\omega}$, de la condición en (6.4) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = c_1\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3\mathbf{j} - \omega_2\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i},$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = c_3\mathbf{k} - c_1\mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega_3\mathbf{i} + \omega_1\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j},$$

3. Consultar la referencia [13, p.59, ejercicio 22]. En [13] se llama «mixto» al triple producto escalar.

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -c_2\mathbf{i} - c_3\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_2\mathbf{i} - \omega_1\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Del sistema de ecuaciones resultan las identificaciones $c_1 = \omega_3$, $c_2 = -\omega_2$ y $c_3 = \omega_1$; de manera que la acción del pivoteo del sistema $\mathcal{O}$ sobre los vectores de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ vistos desde $\mathcal{I}$ queda caracterizada por el vector (axial) $\boldsymbol{\omega}$, tal que

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k};$$

para el eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular es $\|\boldsymbol{\omega}\|$, con unidades $[\boldsymbol{\omega}] = \text{radianes/segundo}$.

Concluimos la sección con la observación de que la razón de cambio producida por una transformación que preserva el producto interior (por tanto la norma y los ángulos) en el espacio euclidiano de dimensión 3 queda especificada por tres parámetros que definen un vector axial $\boldsymbol{\omega}$, que es un eje de rotación (un rotor): las rotaciones generadas son las transformaciones que preservan el producto interior (sin producir una inversión). En los espacios euclidianos de dimensión mayor a tres ya no es posible especificar las rotaciones mediante un eje de rotación.

Desde el punto de vista del sistema inercial $\mathcal{I}$ que está fijo, la razón de cambio del sistema $\mathcal{O}$ que rota está dada por la acción mediante el producto cruz de un eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ sobre los vectores de $\mathcal{O}$.

Al momento estamos suponiendo que los sistemas, el fijo $\mathcal{I}$ y el que rota $\mathcal{O}$, comparten el origen de manera que las rotaciones en consideración son en torno al origen, la única libertad es que el sistema $\mathcal{O}$ rote con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ que sea una función de t (un ejemplo es el trompo que cabecea). Más adelante consideramos el caso general en el que $\mathcal{O}$ rota y se desplaza.

En el ejercicio 6.24 se ilustra cómo determinar la matriz de rotación por un ángulo finito $\|\boldsymbol{\omega}\|$, integrando la ecuación (6.4) usando la representación matricial de la acción por producto cruz de $\boldsymbol{\omega}$; el ejercicio 6.24 trata un caso de un vector $\boldsymbol{\omega}$ constante, independiente de t . La representación matricial de la acción de $\boldsymbol{\omega}$ es el tema a continuación.

6.3. La acción del producto cruz es lineal

La acción del eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ sobre un vector tangente $\mathbf{v}$ mediante el producto cruz es una acción lineal que produce un nuevo vector tangente,

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \lambda \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}.$$

Siendo lineal, la transformación $\mathbf{v} \mapsto \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ tiene una representación matricial

$$\boldsymbol{\omega}^\times = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

con elementos tales que $\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. Para satisfacer esta identidad se requiere que

$$\boldsymbol{\omega}^\times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 \\ a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 \\ a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

para todo vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$. De esta identidad resulta la matriz

$$\boldsymbol{\omega}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Por su acción sobre los vectores tangentes mediante el producto cruz, al vector axial $\boldsymbol{\omega}$ le corresponde la matriz anti-simétrica (6.5),⁴ $(\boldsymbol{\omega}^\times)^t = -\boldsymbol{\omega}^\times$. Se tiene que $\boldsymbol{\omega}^\times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, esto es que el eje de rotación no sufre cambios a causa de la rotación.

El ejercicio 6.24 es un ejemplo que ilustra cómo pasar de la razón de cambio $\boldsymbol{\omega}$ a una rotación R_α por el ángulo finito $\alpha = \|\boldsymbol{\omega}\|$, integrando la ecuación (6.4). La matriz de rotación R_α es real con polinomio característico de grado 3, así que siempre tiene un valor propio real y los otros dos constituyen un par conjugado de números complejos. Así que el único vector propio de R_α es el eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$, cualquier otro vector que no es

4. Las matrices reales 3×3 anti-simétricas (de la forma (6.5)) cuando son provistas del conmutador como una regla de multiplicación constituyen un álgebra anti-conmutativa que se transforma mediante la función exponencial en el grupo de las rotaciones; este es el grupo $\text{SO}(3)$ que preserva el producto interior euclidiano en $\mathbb{R}^3$. Revisar el ejercicio 6.24.

colineal con $\boldsymbol{\omega}$ es rotado por la acción de R_α . El espacio $\mathbb{R}^3$ admite una descomposición como la suma directa ortogonal del eje de rotación $\Omega = \{\lambda\boldsymbol{\omega} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y del plano $\Phi = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$ perpendicular al eje $\boldsymbol{\omega}$; $\mathbb{R}^3 = \Omega \oplus \Phi$. Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ que son invariantes a la acción de R_α son Ω y Φ .

La representación matricial (6.5) para la acción del eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ será usada para definir la *derivada completa* en el sistema $\mathcal{I}$ de un vector tangente $\mathbf{v}$. La derivada completa incluye los cambios en $\mathbf{v}$ generados por el movimiento propio de $\mathbf{v}$ en $\mathcal{O}$ y los generados por la acción del pivoteo de $\mathcal{O}$ respecto de $\mathcal{I}$.

6.4. El movimiento de los vectores

El modelo pone el énfasis en el sistema $\mathcal{O}$ pues es ahí donde vive el observador. El sistema $\mathcal{I}$ es solo un trámite necesario en la construcción del modelo, la utilidad de $\mathcal{I}$ consiste en ser inercial y ahí son válidos los tres principios de la mecánica. Las ecuaciones que resulten en $\mathcal{I}$ al ser transportadas al sistema $\mathcal{O}$ llevan consigo las fuerzas ficticias que actúan sobre el observador en $\mathcal{O}$.

Sea un vector $\mathbf{v}$ que en la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ del sistema $\mathcal{O}$ tiene coordenadas v_i ,

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = \sum v_i\mathbf{e}_i. \quad (6.6)$$

En $\mathcal{O}$ los vectores de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ están fijos así que la razón de cambio del vector $\mathbf{v}$ en el sistema $\mathcal{O}$ solo se debe a que las coordenadas v_i son funciones de t ,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum \frac{dv_i}{dt}\mathbf{e}_i = D\mathbf{v}, \quad \text{en el sistema } \mathcal{O}.$$

Designaremos como D a la derivada respecto de t de un vector que es expresado en una base que permanece fija en el sistema $\mathcal{O}$; por ejemplo en la base estándar en (6.6).

La razón de cambio de $\mathbf{v}$ se ve de maneja diferente en el sistema inercial $\mathcal{I}$, pues el eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ hace rotar a la base en $\mathcal{O}$, los vectores $\mathbf{e}_i$ son funciones de t , y entonces la

derivada completa en $\mathcal{I}$ es

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \sum \frac{dv_i}{dt} \mathbf{e}_i + \sum v_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \\ &= (D + \boldsymbol{\omega}^\times) \mathbf{v} = D_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}, \quad \text{en el sistema } \mathcal{I}.\end{aligned}$$

Designaremos como

$$D_{\boldsymbol{\omega}} = D + \boldsymbol{\omega}^\times \quad (6.7)$$

a la derivada respecto de t en el sistema $\mathcal{I}$ de un vector que es expresado en una base de $\mathcal{O}$ que rota por la acción del eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$; le pido lector que ponga atención en no confundir a D con $D_{\boldsymbol{\omega}}$.

La derivada completa $D_{\boldsymbol{\omega}}$ es la pertinente para aplicar el principio de acción de la mecánica en el sistema inercial $\mathcal{I}$ y la relación entre las derivadas en (6.7) nos proporciona el transporte hacia el sistema $\mathcal{O}$.

Para aplicar el principio de acción en el sistema inercial $\mathcal{I}$ es necesaria la segunda derivada (la aceleración) de los vectores

$$\begin{aligned}D_{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{v} &= D_{\boldsymbol{\omega}}(D\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{v}) = (D + \boldsymbol{\omega}^\times)D\mathbf{v} + (D + \boldsymbol{\omega}^\times)\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{v} \\ &= D^2 \mathbf{v} + (D\boldsymbol{\omega}^\times)\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega}^\times D\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^{\times 2} \mathbf{v}\end{aligned}$$

donde

$$(D\boldsymbol{\omega}^\times)\mathbf{v} = (D\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega}^{\times 2} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}).$$

Si el vector $\mathbf{v}$ es el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de una partícula, su aceleración en el sistema inercial $\mathcal{I}$ es

$$D_{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{r} = D^2 \mathbf{r} + (D\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

en tanto que en el sistema que rota $\mathcal{O}$ la aceleración de la partícula es $D^2 \mathbf{r}$, pues en $\mathcal{O}$ los vectores de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ están fijos. En el ejercicio 6.23 se demuestra que el vector $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ es centrípeto, que apunta perpendicularmente hacia el eje de rotación.

En el sistema inercial $\mathcal{I}$ aparecen tres términos extra en la aceleración $D_{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{r}$ de la partícula por efecto de la rotación $\boldsymbol{\omega}$ del sistema $\mathcal{O}$, identificados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\text{Aceleración de Coriolis} &= 2\boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r}, \\ \text{Aceleración centrípeta} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ \text{Aceleración de Euler} &= (D\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}.\end{aligned}$$

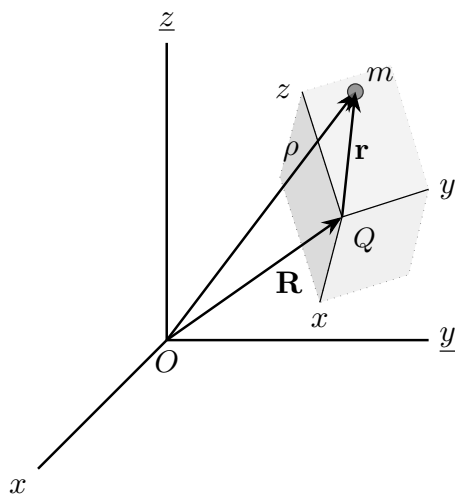


Figura 6.2

Cuando vemos en la feria al carrusel que arranca a girar notamos que al ir incrementando la velocidad angular los caballitos que van en el perímetro exterior llevan una aceleración tangencial al perímetro (que los hace girar cada vez más rápido), esta es la aceleración de Euler; los caballitos que van pegados al centro tienen una aceleración de Euler menor que los del perímetro. Cuando el carrusel alcanza su velocidad de trabajo constante la aceleración de Euler desaparece ($D\omega = 0$); solo se mantiene la aceleración centrípeta, que es radial (perpendicular al perímetro). No hay la aceleración de Coriolis pues los caballitos están fijos ($D\mathbf{r} = 0$) al carrusel (pero alguien que vaya caminando sobre el carrusel ($D\mathbf{r} \neq 0$) se sentirá como mareado).

6.5. Uno está fijo y el que rota se traslada

La situación se esquematiza en la figura 6.2 donde $\mathbf{R}$ es el vector de posición del origen Q del sistema $\mathcal{Q}$, el sistema que rota siguiendo al eje ω (el sistema inercial $\mathcal{I}$ es el que está fijo).

Una partícula de masa m se ubica en la posición

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \text{en el sistema } \mathcal{O},$$

en relación al origen Q . La velocidad de m en $\mathcal{O}$ (donde la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ está fija) es

$$D\mathbf{r} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k},$$

donde $\dot{x} = dx/dt$ y etc. No hay riesgo de confusión con esta notación pues el tiempo corre igual en todos los sistemas.

En el sistema $\mathcal{I}$ la posición de m la da el vector $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{R}$ en relación al origen O . La velocidad de m es

$$D_{\omega}\boldsymbol{\rho} = D_{\omega}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{R}} + D\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \text{en el sistema } \mathcal{I},$$

pues el vector $\mathbf{R}$ es del sistema $\mathcal{I}$ que no rota; recordar que el origen Q es del sistema $\mathcal{O}$, sobre el que actúa la rotación.

La aceleración de m es la segunda derivada

$$D^2\mathbf{r} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}, \quad \text{en el sistema } \mathcal{O}.$$

La aceleración en el sistema $\mathcal{I}$ es

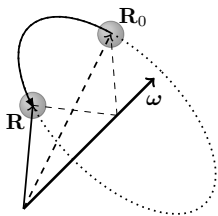
$$\begin{aligned} D_{\omega}^2\boldsymbol{\rho} &= \ddot{\mathbf{R}} + D_{\omega}(D\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \ddot{\mathbf{R}} + D^2\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r} + (D\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad \text{en } \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Aparecen en $\mathcal{I}$ las tres aceleraciones presentes en un sistema que rota, más la aceleración $\ddot{\mathbf{R}}$ por el desplazamiento de Q , adicional a los efectos de la rotación.

Ejemplo 6.1. El *desplazamiento angular* es el provocado por un eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ que actúa sobre el vector de posición $\mathbf{R}$ de un objeto. La velocidad de traslado $\dot{\mathbf{R}}$ producida por la rotación ($\boldsymbol{\omega}$ con velocidad angular $\|\boldsymbol{\omega}\|$) es

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \tag{6.8}$$

y el desplazamiento $\mathbf{R}(t)$ se obtiene integrando esta ecuación. En el ejercicio 6.24 se integra la ecuación (6.8) para un eje de rotación $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ = constante.



Para el caso de un eje ω constante la integral de (6.8) para una condición inicial $\mathbf{R}_0$ se ve como en la figura al lado. Se aplica la regla de la mano derecha.

La trayectoria del desplazamiento angular para un eje ω constante es un círculo sobre el plano perpendicular a ω y que contiene los puntos $\mathbf{R}_0$ y $\mathbf{R}$. Después de un tiempo t los radios del círculo en el punto de inicio $\mathbf{R}_0$ y en el punto $\mathbf{R}(t)$ han barrido un sector circular de un ángulo de $t\|\omega\|$ radianes. Los radios se muestran en la figura como las líneas a trazos cortos.

En el ejercicio 6.23 se muestra que la aceleración $\ddot{\mathbf{R}} = \omega \times (\omega \times \mathbf{R})$ es centrípeta, apunta de la posición del objeto en $\mathbf{R}$ al eje de giro y es perpendicular al eje ω . $\square$

6.6. Las fuerzas ficticias en el que rota

Los tres principios de la mecánica son válidos en el sistema inercial $\mathcal{I}$. Ahora vamos a aplicar en $\mathcal{I}$ el principio de acción.

Sea $\mathbf{F}$ la fuerza total actuando sobre m en el sistema $\mathcal{I}$. El principio de acción establece que

$$mD_{\omega}^2\boldsymbol{\rho} = \mathbf{F} = m\left(\ddot{\mathbf{R}} + D^2\mathbf{r} + 2\omega \times D\mathbf{r} + (D\omega) \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})\right),$$

de donde se obtiene la EDO para el movimiento de m en el sistema $\mathcal{O}$

$$mD^2\mathbf{r} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - 2m\omega \times D\mathbf{r} - m(D\omega) \times \mathbf{r} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}), \quad (6.9)$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza total actuando sobre m según se observa en el sistema $\mathcal{I}$. Los demás términos son las fuerzas ficticias que actúan en $\mathcal{O}$ como consecuencia de su movimiento acelerado (por $\ddot{\mathbf{R}}$) y por efecto de la rotación (los términos que dependen de ω); las fuerzas ficticias en $\mathcal{O}$ aparecen con sentido opuesto a las aceleraciones correspondientes en $\mathcal{I}$. Las fuerzas se llaman de igual manera a como se llama a las aceleraciones correspondientes, como se listan en la figura 6.3.

$$\begin{aligned}
\text{Fuerza de Coriolis} &= -2m \boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r}, \\
\text{Fuerza centrífuga} &= -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\
\text{Fuerza de Euler} &= -m (D\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Figura 6.3.

Las fuerzas ficticias en el sistema que rota.

En la biosfera solo la fuerza de Coriolis es relevante. La fuerza de Euler es prácticamente inexistente pues el período de precesión (que hace $D\boldsymbol{\omega} \neq 0$) para el eje de rotación de la Tierra es de casi 26,000 años y la fuerza centrífuga es proporcional a $\|\boldsymbol{\omega}\|^2$ que es del orden de 10^{-9} , pues la velocidad angular de la Tierra es muy lenta, $\|\boldsymbol{\omega}\| = 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

6.7. El péndulo de Foucault

La construcción del modelo para el péndulo de Foucault empieza describiéndolo en un sistema de referencia local, como lo veríamos si estuviéramos en Santa Genoveva. Tal descripción se da en la figura 6.4. Luego transportaremos la descripción local a un punto sobre la esfera que es el modelo de la Tierra. Por último, la esfera se colocará en el sistema de referencia inercial «cósmico» $\mathcal{I}$, respecto al cual la esfera (la Tierra) rota.

Empecemos por la descripción local en la figura 6.4. La longitud de la cuerda que sostiene a la masa m es de longitud ℓ , mucho mayor que la altura z que la masa llegue a levantar como máximo durante su oscilación.

La longitud ℓ es de decenas de metros, como de unos 20 m, por lo que en la figura 6.4 el pivote del péndulo queda afuera, muy por arriba, de la imagen. En cambio la altura máxima que llega a levantar la masa m es del orden de los quince centímetros. En todo momento se tiene que $z/\ell \ll 1$.

El péndulo debe mantenerse oscilando durante horas por lo que la masa m se escoge lo más grande que se pueda para que la energía total E en el péndulo sea mucho mayor que la energía que se pierde (por fricción y resistencia del aire) en cada periodo de la oscilación. Recuerden que el periodo de oscilación de un péndulo es $\sqrt{\ell/g}$, independiente de la masa m .

En la figura 6.4 el vector de posición de m respecto de Q es $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ con proyección $\boldsymbol{\rho} = (x, y, 0)^t$ sobre el plano x - y y

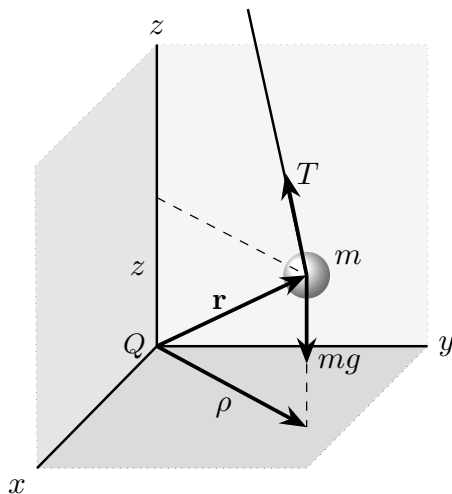


Figura 6.4

proyección z sobre el eje z . El origen Q es el punto de equilibrio de la masa m .

Las variables ρ y z no son independientes por la restricción en el movimiento establecida por la cuerda; la restricción es $\ell^2 = \rho^2 + (z - \ell)^2$, con $\rho = \|\rho\|$. Por tanto, la coordenada z como una función de ρ

$$z = \ell(1 - \sqrt{1 - (\rho/\ell)^2}) \approx \rho^2/(2\ell) \ll \ell$$

describe aproximadamente una parábola muy aplanada.

La aproximación la consideramos aceptable para oscilaciones de amplitud pequeña, $z \ll \ell \rightarrow \rho/\ell \ll 1$ (lo cual se logra usando un cable de gran longitud ℓ), y tomaremos al vector ρ , sobre el plano x - y , como la variable independiente.

6.8. El análisis de fuerzas

Las dos fuerzas que actúan sobre la masa m del péndulo son su peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$ y la tensión $\mathbf{T}$ del cable que la sostiene. La fuerza total sobre m es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{k} + \mathbf{T}.$$

Designamos a la magnitud de la tensión como $T = \|\mathbf{T}\|$.

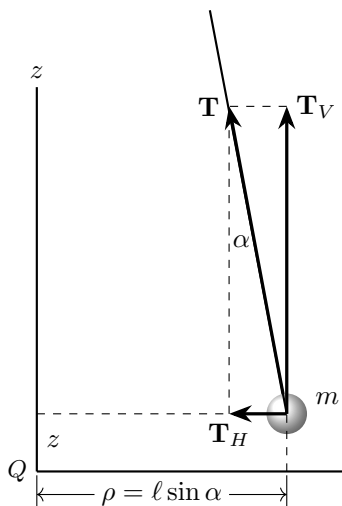


Figura 6.5

Todos los vectores que aparecen en el péndulo de la figura 6.4, la tensión $\mathbf{T}$, el peso $\mathbf{W}$, el vector de posición $\mathbf{r}$ y sus proyecciones $\boldsymbol{\rho}$ y $z\mathbf{k}$ están sobre un mismo plano, el cual se muestra en la figura 6.5.

En la figura 6.5 se designa como α al ángulo que hace la cuerda del péndulo con la vertical y se hace la descomposición del vector de tensión $\mathbf{T}$ en sus componentes vertical $\mathbf{T}_V$ y horizontal $\mathbf{T}_H$.

Para la componente vertical se tiene que $\|\mathbf{T}_V\| = \cos \alpha T$, siendo $\cos \alpha = (\ell - z)/\ell$, por lo que

$$\mathbf{T}_V = \frac{\ell - z}{\ell} T \mathbf{k}.$$

Para la componente horizontal se tiene que $\|\mathbf{T}_H\| = \sin \alpha T$, por lo que

$$\mathbf{T}_H = -\sin \alpha T \hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad (6.10)$$

donde el vector unitario es

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\rho}\|} \boldsymbol{\rho} = \frac{x}{\rho} \mathbf{i} + \frac{y}{\rho} \mathbf{j} = \frac{x}{\ell \sin \alpha} \mathbf{i} + \frac{y}{\ell \sin \alpha} \mathbf{j},$$

pues, como se muestra en la figura 6.5, $\rho = \ell \sin \alpha$. Sustituyendo el vector unitario $\hat{\rho}$ en (6.10) se tiene que

$$\mathbf{T}_H = -T \left(\frac{x}{\ell} \mathbf{i} + \frac{y}{\ell} \mathbf{j} \right) = -T \frac{\rho}{\ell} \left(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \right),$$

donde definimos el ángulo polar φ sobre el plano x - y mediante la relación $\cos \varphi = x/\rho$.

Recolectando en $\mathbf{T}$ los resultados para las componentes $\mathbf{T}_V$ y $\mathbf{T}_H$ se tiene la siguiente expansión para el vector de tensión,

$$\mathbf{T} = T \left(\frac{\ell - z}{\ell} \mathbf{k} - \frac{x}{\ell} \mathbf{i} - \frac{y}{\ell} \mathbf{j} \right)$$

y la fuerza total sobre m es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -mg\mathbf{k} + T \left(\frac{\ell - z}{\ell} \mathbf{k} - \frac{x}{\ell} \mathbf{i} - \frac{y}{\ell} \mathbf{j} \right) \\ &\approx (T - mg)\mathbf{k} - T \left(\frac{x}{\ell} \mathbf{i} + \frac{y}{\ell} \mathbf{j} \right) = (T - mg)\mathbf{k} - T \frac{1}{\ell} \boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.9. El péndulo sobre la Tierra

El montaje del péndulo de Foucault en la figura 6.4 está ubicado sobre la superficie de la Tierra a la manera que se modela en la figura 6.6. La ubicación se señala por el vector $\mathbf{R}$ que tiene un ángulo de co-latitud λ , que se mide desde el Polo Norte hacia el Polo Sur; $\lambda = 90^\circ$ es la línea del Ecuador y $\lambda > 90^\circ$ es el hemisferio sur.

La ciudad de San Luis Potosí (según la Wikipedia) tiene una latitud de 22° - $36'$ (hacia el norte del Ecuador) que corresponde a una co-latitud de $\lambda_{SLP} = 67^\circ$ - $24'$ (desde el Polo Norte).

En el punto $\mathbf{R}$ se encuentra ubicado el sistema de referencia $\mathcal{O}$ de la figura 6.4 con su eje z alineado con el vector de posición $\mathbf{R}$, el plano x - y es tangente a la esfera (la Tierra) y el eje x es colineal al meridiano que pasa por el punto $\mathbf{R}$; el eje- x apunta hacia el Sur y el eje- y hacia el Oriente.

El eje $\underline{z}$ del sistema inercial $\mathcal{I}$ se elige como el eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$ de la Tierra y el plano $\underline{x}$ - $\underline{y}$ de $\mathcal{I}$ corta a la Tierra por la línea del Ecuador. De esta manera los vectores $\mathbf{R}$ y $\boldsymbol{\omega}$ están sobre el plano x - z ($y = 0$) del sistema $\mathcal{O}$ y el eje de rotación es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(-\sin \lambda, 0, \cos \lambda)^t, \quad \omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1},$$

en la base estándar de $\mathcal{O}$, con $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ la velocidad angular.

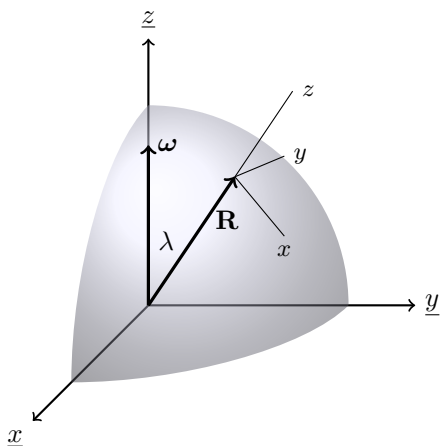


Figura 6.6

La ecuación de movimiento en el sistema $\mathcal{O}$ es la que se obtuvo en (6.9) de manera general (en la página 138). Para el péndulo sobre la tierra los términos de orden $\|\boldsymbol{\omega}\|^2 \sim 10^{-9}$ son insignificantes, estos términos son la fuerza centrífuga por rotación y la fuerza centrífuga por la aceleración del desplazamiento angular $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$. La fuerza de Euler es aún más insignificante sobre la Tierra.

Para el péndulo las únicas fuerzas a considerar en (6.9) son la fuerza total $\mathbf{F}$ (6.11) y la de Coriolis,

$$\begin{aligned} mD^2\mathbf{r} &= \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r} \\ &= (T - mg)\mathbf{k} - \frac{1}{\ell}T\boldsymbol{\rho} - 2m\boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

El desplazamiento del péndulo en la dirección z es pequeño y lento, lo que nos permite aproximar a cero la coordenada z y sus derivadas $\dot{z}$ y $\ddot{z}$. Con esta aproximación el producto cruz en la fuerza de Coriolis es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times D\mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega \sin \lambda & 0 & \omega \cos \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\omega \dot{y} \cos \lambda \mathbf{i} + \omega \dot{x} \cos \lambda \mathbf{j} - \omega \dot{y} \sin \lambda \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el producto cruz en (6.12)

$$m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}) = (T - mg + 2m\omega \sin \lambda \dot{y})\mathbf{k} \\ + \left(-\frac{T}{\ell}x + 2m\omega \cos \lambda \dot{y}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{T}{\ell}y + 2m\omega \cos \lambda \dot{x}\right)\mathbf{j}.$$

De aquí resultan tres ecuaciones, una por cada coordenada; las incógnitas son T , x y y . Para la coordenada z se tiene que

$$0 = T - mg + 2m\omega \sin \lambda \dot{y} \quad \rightarrow \quad T = mg - 2m\omega \sin \lambda \dot{y} \approx mg$$

pues $g \gg \omega \dot{y}$. Para las coordenadas x y y resultan las ecuaciones

$$\ddot{x} = -(g/\ell)x + 2\omega \dot{y} \cos \lambda = -\beta^2 x + 2\alpha \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -(g/\ell)y - 2\omega \dot{x} \cos \lambda = -\beta^2 y - 2\alpha \dot{x}$$

donde se definieron las constantes $\beta^2 = g/\ell$ y $\alpha = \omega \cos \lambda$, con $[\beta] = [\alpha] = \text{s}^{-1}$. Para la ciudad de San Luis Potosí la velocidad angular $\alpha_{SLP} = 2.8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; los valores extremos de α son en el Polo Norte $\alpha_{PN} = \omega$ y en la línea del Ecuador $\alpha_E = 0$. Mientras que el periodo de oscilación del péndulo es (aproximadamente) el mismo sobre cualquier punto de la Tierra y es del orden de un segundo, por lo que la frecuencia angular $\beta \sim 1 \text{ s}^{-1}$.

6.10. Solución de las ecuaciones

La estructura del par de ecuaciones a resolver

$$\ddot{x} = -\beta^2 x + 2\alpha \dot{y} \quad \text{y} \quad \ddot{y} = -\beta^2 y - 2\alpha \dot{x}$$

nos sugiere introducir la variable compleja $\tilde{z} = x + iy$. Multiplicando por i la segunda ecuación y sumándola a la primera se obtiene una EDO para $\tilde{z}$,

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\beta^2(x + iy) + 2\alpha(\dot{y} - i\dot{x}) \quad \rightarrow \quad \ddot{\tilde{z}} + 2i\alpha\dot{\tilde{z}} + \beta^2\tilde{z} = 0.$$

La ecuación para $\tilde{z}$ es lineal y tiene solución de la forma siguiente,

$$\tilde{z} = e^{\gamma t} \quad \rightarrow \quad \gamma^2 + 2i\alpha\gamma + \beta^2 = 0.$$

Las raíces de la cuadrática

$$\gamma = -i\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \approx -i(\alpha \pm \beta), \quad \text{pues } \beta \gg \alpha,$$

nos dan la solución general para $\tilde{z}$,

$$\tilde{z}(t) = Ae^{-i(\alpha+\beta)t} + Be^{-i(\alpha-\beta)t} = e^{-i\alpha t} \left(Ae^{-i\beta t} + Be^{i\beta t} \right)$$

con coeficientes complejos $A = a_1 + ia_2$ y $B = b_1 + ib_2$.

El efecto de la fuerza de Coriolis en la solución $\dot{z}(t)$ está en el factor $\exp(-i\alpha t)$, que no depende de los parámetros del péndulo: no de la longitud ℓ del cable, no de la masa m , ni de la aceleración g . El segundo factor entre paréntesis es la oscilación de un péndulo en un sistema inercial, con frecuencia angular $\beta = \sqrt{g/\ell}$ y sin la acción de fuerzas ficticias. Los dos fenómenos se factorizan “limpiamente” en el péndulo de Foucault.

Observamos que el movimiento (la solución $\dot{z}(t)$) es independiente de la masa m del péndulo. Que lo más recomendable sea usar una gran masa (lo más grande que sea posible) es para mantener al péndulo en oscilación por al menos pasada una hora, más de 60 minutos; mientras más tiempo dure oscilando el péndulo la estimación experimental de α es mejor.

Los coeficientes complejos A y B en la solución $\dot{z}(t)$ quedan determinados por las condiciones iniciales en las que se pone a oscilar al péndulo. Lo usual (pues reduce las complicaciones) es iniciar el movimiento a partir del reposo con $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$ (por lo que $\dot{z}(0) = 0$) y dar un desplazamiento inicial hacia el Oriente (de donde nos llega la luz del nuevo día) con $y = Y$ y $x = 0$ (lo que corresponde a $\dot{z}(0) = iY$).

Imponiendo las condiciones iniciales a la solución general $\dot{z}(t)$ se obtienen las siguientes condiciones para los coeficientes

$$\dot{z}(0) = iY = A + B \quad \rightarrow \quad B = iY - A$$

y

$$\dot{z}(0) = 0 = (\alpha - \beta)Y + iA(\alpha - 2\beta) \approx -\beta(Y + i2A),$$

de las cuales resultan los siguientes coeficientes

$$A = B = i\frac{1}{2}Y.$$

Con estos coeficientes el movimiento del péndulo es

$$\dot{z}(t) = Yie^{-i\alpha t}\frac{1}{2}(e^{-i\beta t} + e^{i\beta t}) = Yie^{-i\alpha t}\cos\beta t.$$

Las coordenadas x y y son las partes real e imaginarias de $\dot{z}$

$$x(t) = Y\sin\alpha t\cos\beta t \quad y(t) = Y\cos\alpha t\cos\beta t,$$

donde las velocidades angulares α y β son muy diferentes en magnitud, $\alpha \ll \beta$.

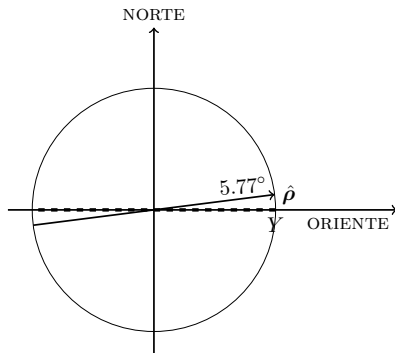


Figura 6.7

En forma vectorial el movimiento del péndulo sobre el plano $x-y$ consiste de dos factores

$$\boldsymbol{\rho}(t) = Y \cos \beta t \, \hat{\boldsymbol{\rho}}(t), \quad \text{con } \hat{\boldsymbol{\rho}}(t) = \sin \alpha t \, \mathbf{i} + \cos \alpha t \, \mathbf{j}.$$

El primer factor es la oscilación del péndulo en la dirección del vector unitario $\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)$; el plano de oscilación del péndulo es coplanar a los vectores $\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)$ y $\mathbf{k}$. El segundo factor es el vector unitario $\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)$ que gira muy lentamente a la velocidad angular α por acción de la fuerza de Coriolis.

6.11. Discusión y un experimento

En el Polo Norte la co-latitud es $\lambda = 0$ así que $\alpha = \omega$ y el plano de oscilación $\mathbf{k}-\hat{\boldsymbol{\rho}}$ del péndulo de Foucault da una vuelta al día en el Polo Norte. El Polo Sur tiene co-latitud $\lambda = \pi$ así que $\alpha = -\omega$ y el plano del péndulo da una vuelta al día en el Polo Sur, pero en sentido contrario al del péndulo en el Polo Norte. En El Ecuador la co-latitud es $\lambda = \pi/2$ así que $\alpha = 0$ y el plano inicial de oscilación $y-z$ ($x = 0$ y Y hacia el Oriente) no se mueve de ahí.

La ciudad de San Luis Potosí está situada entre el Polo Norte y El Ecuador, rotando con la Tierra a una velocidad angular

$$\alpha_{SLP} = \omega \cos \lambda_{SLP} = 2.8 \times 10^{-5} \, \text{s}^{-1}.$$

Para tener una idea visual del avance del plano de oscilación a la velocidad angular α_{SLP} , en la figura 6.7 se muestra el

círculo que traza el plano de oscilación $\mathbf{k}-\hat{\rho}$ al rotar a velocidad angular α_{SLP} , suponiendo que el movimiento de oscilación no se amortigua.

Al inicio el péndulo oscila a lo largo del eje hacia el Oriente, marcado en línea a trazos cortos en la figura 6.7. Después de $t = 1$ hora de haber iniciado el movimiento del péndulo el plano de oscilación se encuentra en San Luis Potosí girado por 5.77° hacia el Norte de la posición inicial; siempre y cuando el péndulo logre mantenerse en oscilación por una hora.

El péndulo de Foucault es un instrumento sensible que detecta y mide la fuerza de Coriolis sobre la Tierra. Los estudiantes podrían organizar un experimento con el péndulo de la CIACYT (UASLP) (uno más de los legados a la «cultura-UASLP» de Pepe Nieto, Esequiel Ontiveros, Chuy Ramos y todo el equipo que lo hizo posible) para determinar una estimación de la latitud a la que se encuentra San Luis Potosí; tomando como conocida la velocidad angular $\|\boldsymbol{\omega}\|$ de rotación de la Tierra (la aproximación —sin entrar en detalles astronómicos— es una vuelta cada 24 horas).

Una sugerencia para el experimento es colocar en el péndulo un láser chino de los que venden los ambulantes en los semáforos. Tal vez el mejor lugar para el láser es la parte inferior, el polo sur, de la esfera del péndulo y el haz luminoso alineado con el hilo. Sobre el piso se extiende una hoja de pizarrón blanco y el punto de luz es el indicador para hacer los registros que permitan sacar de los datos (las marcas hechas sobre el pizarrón) la velocidad angular $\alpha_{SLP} = \omega \cos \lambda_{SLP}$ a la que gira el plano de oscilación del péndulo en San Luis Potosí; de aquí sale la estimación para la co-latitud λ_{SLP} .

La fuerza de Coriolis la deben de sentir las aves al volar. Otro buen ejercicio es calcular la intensidad de la fuerza de Coriolis sobre una masa de 500 g (una paloma) que vuela en SLP a 1 km/h en dirección al Oriente (o comparar la aceleración de Coriolis con $g = 980 \text{ cm/s}^2$). Quizás sea la fuerza de Coriolis la que indique a las palomas para donde es el Norte y para donde el Sur. A las palomas que viven en el Ecuador les da lo mismo el Norte que el Sur.

6.12. Ejercicios

6.22. Sean los ejes de rotación

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0, 0)^t, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1, 0)^t \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega}_3 = (0, 0, 1)^t.$$

Las matrices anti-simétricas asociadas a estos ejes,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\omega}_1^\times, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_2^\times \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\omega}_3^\times,$$

satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2] = \boldsymbol{\varepsilon}_3 \quad \text{y} \quad \text{permutaciones cíclicas de los índices.}$$

Además se tiene que $\sum \boldsymbol{\varepsilon}_i^t \boldsymbol{\varepsilon}_i = 2$.

DEMOSTRACIÓN. Las matrices $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ se obtienen de la definición (6.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con estas matrices se procede a calcular los conmutadores

$[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2] = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1$, $[\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_1]$ y $[\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3]$. También es mediante un cálculo directo como se demuestra que $\sum \boldsymbol{\varepsilon}_i^t \boldsymbol{\varepsilon}_i = 2$. $\square$

6.23. Sea el vector $\boldsymbol{\omega}$ un eje de rotación y sea $\mathbf{r}$ un vector de posición cualquiera. La doble acción por producto cruz de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\mathbf{r}$ es el vector

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 P_\perp \mathbf{r},$$

donde $P_\perp$ es la matriz de proyección ortogonal sobre el plano ortogonal al eje de rotación $\boldsymbol{\omega}$. Por el signo “-” la doble acción de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\mathbf{r}$ produce un vector centrípeto.

DEMOSTRACIÓN. La doble acción de $\boldsymbol{\omega}$ se produce mediante la matriz

$$\boldsymbol{\omega}^{\times 2} = -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_2 \omega_1 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_1 & \omega_3 \omega_2 & \omega_3^2 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

en donde el primer término es proporcional a la matriz identidad y el segundo término es el siguiente producto

$$\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^t = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3) = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_2 \omega_1 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_1 & \omega_3 \omega_2 & \omega_3^2 \end{pmatrix}.$$

Si ahora definimos el vector unitario $\hat{\omega} = \omega / \|\omega\|$, la matriz al cuadrado (6.13) se escribe como

$$\omega^{\times 2} = -\|\omega\|^2(1 - \hat{\omega}\hat{\omega}^t) = -\|\omega\|^2 P_{\perp},$$

que demuestra que el vector $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ es centrípeto. $\square$

6.24. Para el eje de rotación constante $\omega = (0, 0, \omega)^t = \omega \mathbf{k}$, la razón de cambio del vector $\mathbf{v}$, dada por $d\mathbf{v}/dt = \omega \times \mathbf{v}$, se integra en $\mathbf{v}(t) = R_{\omega t} \mathbf{v}_0$ (siendo $\mathbf{v}_0$ un vector constante de integración arbitrario y $\omega = \|\omega\|$), con la matriz de rotación

$$R_{\omega} = \bar{P} + P \cos \omega + \varepsilon_3 \sin \omega = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en donde la matriz P es la proyección ortogonal sobre el plano x - y y la matriz $\bar{P}$ es la proyección sobre el eje- z ($P + \bar{P} = 1$). Se verifica que el eje de rotación ω permanece invariante ante la acción del propio eje ω , $\omega \times \omega = 0$, pues $R_{\omega} \mathbf{k} = \mathbf{k}$.

DEMOSTRACIÓN. En términos de la matriz $\omega^{\times} = \omega \varepsilon_3$ la razón de cambio es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega \varepsilon_3 \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \varepsilon_3 \mathbf{v},$$

donde se hizo el cambio de variable $\tau = \omega t$. Multiplicando por el factor de integración $\exp(-\tau \varepsilon_3)$ se obtiene

$$e^{-\tau \varepsilon_3} \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \varepsilon_3 e^{-\tau \varepsilon_3} \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(e^{-\tau \varepsilon_3} \mathbf{v} \right) = 0,$$

por lo que $e^{-\tau \varepsilon_3} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \text{constante}$, y lo que sigue es calcular la matriz $R_{\tau} = e^{\tau \varepsilon_3}$. Del polinomio característico de ε_3

$$\det(\varepsilon_3 - x) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 - x$$

resulta (por el teorema de Hamilton, ver [11, p. 260]) que las potencias impares de ε_3 son proporcionales a ε_3

$$\varepsilon_3^3 = -\varepsilon_3 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_3^{2n+1} = (-1)^n \varepsilon_3, \quad n \geq 0,$$

y resulta que las potencias pares son proporcionales a la matriz de proyección $P = -\varepsilon_3^2$,

$$\varepsilon_3^4 = -\varepsilon_3^2 = P \quad \rightarrow \quad \varepsilon_3^{2n} = (-1)^n P, \quad n \geq 1.$$

Entonces calculamos por separado las potencias pares e impares en la serie de potencias de $e^{\tau \epsilon_3}$. La serie de potencias pares se evalúa como sigue

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(\tau \epsilon_3)^{2n}}{(2n)!} &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} \epsilon_3^{2n} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} (-1)^n P \\ &= (1 - P) + P \sum_{n \geq 0} \frac{(i\tau)^{2n}}{(2n)!} = \bar{P} + P \cos \tau. \end{aligned}$$

La serie de potencias impares se evalúa como sigue

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(\tau \epsilon_3)^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} \epsilon_3^{2n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \epsilon_3 \\ &= \frac{\epsilon_3}{i} \sum_{n \geq 0} \frac{(i\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \epsilon_3 \sin \tau \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados para las series de potencias pares e impares se obtiene la matriz de rotación R_ω . $\square$

6.25. La matriz de rotación para un eje ω arbitrario es

$$R_\omega = \bar{P} + (\cos \omega + \mathbf{m} \sin \omega) P$$

donde $\bar{P}$ es la matriz de proyección sobre el eje ω , P es la proyección sobre el plano ortogonal a ω y la matriz

$$\mathbf{m} = \frac{\omega^\times}{\|\omega\|}, \quad \text{con } P\mathbf{m} = \mathbf{m}P = \mathbf{m}.$$

DEMOSTRACIÓN. Procedemos a evaluar la serie de potencias para la matriz $\exp(\omega^\times)$. La matriz $\omega^\times$ tiene polinomio característico

$$p(x) = \det(\omega^\times - x) = \begin{vmatrix} -x & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & -x & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 - \|\omega\|^2 x$$

de donde

$$\mathbf{m}^3 = -\mathbf{m} \quad \rightarrow \quad \mathbf{m}^{2n+1} = (-1)^n \mathbf{m}, \quad n \geq 0.$$

Para las potencias pares partimos del cuadrado

$$\omega^{\times 2} = -\|\omega\|^2 + \omega \omega^t \quad \rightarrow \quad \mathbf{m}^2 = -(1 - \hat{\omega} \hat{\omega}^t) = -P.$$

Por lo que

$$\mathbf{m}^{2n+1} = (-1)^n \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}^{2n+2} = (-1)^n \mathbf{m}^2 = (-1)^{n+1} P,$$

o bien $\mathbf{m}^{2n} = (-1)^n P$ para $n \geq 1$. Para la serie de potencias pares se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(\omega^\times)^{2n}}{(2n)!} &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} \mathbf{m}^{2n} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(i\omega)^{2n}}{(2n)!} P \\ &= 1 - P + P \sum_{n \geq 0} \frac{(i\omega^{2n})}{(2n)!} = \bar{P} + P \cos \omega. \end{aligned}$$

Para las potencias impares se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(\omega^\times)^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} \mathbf{m}^{2n+1} = -i\mathbf{m} \sum_{n \geq 0} \frac{(i\omega)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbf{m} \sin \omega \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados para la serie de potencias pares y la serie de potencias impares se obtiene la matriz $R_\omega = \exp(\omega^\times)$. $\square$

6.26. La matriz de rotación que lleva al vector $\mathbf{k}$ (el Polo Norte) al vector $\mathbf{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ sobre la esfera unitaria (con $0 < \theta < \pi$) es

$$R = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi + \cos \theta \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) & \cos^2 \phi + \cos \theta \sin^2 \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. El eje ω que genera la rotación R tiene norma $\|\omega\| = \theta$ y es perpendicular a $\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}$,

$$\frac{\omega}{\|\omega\|} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{k} \times \mathbf{r}\|} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0).$$

Por lo que las matrices

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi \\ -\cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{pmatrix}, \quad P = -\mathbf{m}^2, \quad \bar{P} = 1 - P$$

son las necesarias para calcular R aplicando el resultado del problema anterior (con $\omega = \theta$). $\square$

El péndulo de Foucault en la UASLP

José Nieto y Pierre Grech

Introducción.

Una esfera de bronce rellena de plomo con un peso de 67 kilos se balancea suspendida de un cable de acero de 19 metros de largo en el Hall de entrada de la Coordinación de Investigación Aplicada en Ciencia y Tecnología (CIACYT) de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP).

La gran esfera se desplaza sobre un mural en el piso que representa motivos de la región potosina. El péndulo y el mural de dos metros de diámetro constituyen una escultura de acción: la esfera recorre a escasos centímetros el diámetro del mural con un movimiento de vaivén majestuoso y regular de 8.7 segundos de periodo. Los que ingresan al edificio se absorben en el movimiento y hacen seguramente conjeturas sobre el motivo por el cual está ahí.

Todo comenzó en 1851 cuando a un científico francés se le ocurrió algo que a nadie le había pasado por la cabeza; ya que el plano de oscilación de un péndulo no varía aunque su punto de anclaje tenga una rotación, esto podría servir para demostrar la rotación de la Tierra. Se trata de una demostración elegante y profunda, en base a un experimento muy sencillo.

En diciembre de 1850 el científico francés Jean Bertand Leon Foucault estaba poniendo a punto un reloj para controlar el movimiento de los telescopios del observatorio de Paris con su amigo Gustave Froment, quien era el mejor fabricante de instrumentos de Paris. Foucault constató que la varilla del péndulo fijada al mandril oscila en un plano fijo, aunque se rote el mandril que soporta al punto de anclaje.

Esa observación lo llevó a montar en el sótano de su casa unos días después, el 8 de enero de 1951, un péndulo de 2 metros de longitud con una masa de 5 Kg. Lo delicado del experimento obligó a Foucault a trabajar a las dos de la mañana para evitar las vibraciones de la calle que alterarían el experimento, así constató que a medida que pasaba el tiempo se hacía evidente una pequeña variación del ángulo. Se convenció de haber observado que el plano de oscilación giraba muy lentamente en el sentido de las manecillas del reloj.

El 3 de febrero, gracias al apoyo de Francois Arago (1786-1853), científico y político, Foucault renovó su experimento pero esta vez en la Sala Meridiana del Observatorio de París con un péndulo de 11 metros. La desviación angular del plano de oscilación fue más visible y confirmada definitivamente.

El apoyo político del viejo Arago, seguramente influyó en el presidente de Francia Louis Bonaparte para que se autorizara a Foucault realizar el experimento bajo la cúpula de El Panteón de París. Para esta ocasión el instrumentista Froment fabricó una esfera de 18 centímetros de diámetro hueca de latón rellena de plomo y con un peso de 28 kilogramos. La esfera fue fijada a la cúpula a 67 metros de altura por medio de una cuerda de piano. El 31 de marzo el experimento se realizó con bombo y platillo y los parisinos respondieron a la invitación que decía

«Vengan a ver a la Tierra girar . . . »

El experimento fue memorable. El péndulo fue soltado y una aguja instalada en su base trazaba un surco sobre una cama de arena húmeda. El tiempo que tardaba en hacer un vaivén completo era de 16.42 segundos mostrando claramente en cada oscilación una desviación de algunos milímetros. Al cabo de una hora el surco tenía una apertura angular de 11.3 grados.

El experimento en El Panteón fue reproducido poco tiempo después en la catedral de Reims y en muchas otras ciudades con latitudes diferentes. Resulta que la desviación angular depende de la latitud, siendo máxima en los polos y nula en el ecuador. En San Luis Potosí, por ejemplo, que está a una latitud de 22 grados la desviación angular de un péndulo en una hora es de 5.6 grados.

El péndulo de Foucault fue sin duda el experimento más recordado del siglo XIX por su sencillez, sus profundas implicaciones filosóficas y por su difusión mediática.

Teoría heliocéntrica.

El experimento de Foucault en El Panteón resolvió definitivamente la discusión de si la Tierra era el centro del Universo (teoría geocéntrica) o si esta se mueve alrededor del Sol igual que los demás planetas (teoría heliocéntrica).

Aristóteles (384-322 a.c.) planteó un modelo que colocaba a la Tierra como centro inmóvil del Universo, teoría que perduró

durante dos mil años. Sin embargo, la teoría heliocéntrica en la que el Sol era el centro y todos los planetas se movían alrededor fue planteada en la misma época por Aristarco de Samos (310-230 a.c). Los trabajos originales de Aristarco se perdieron probablemente en uno de los incendios de la biblioteca de Alejandría pero hay referencias a sus escritos en los trabajos de Arquímedes. El modelo heliocéntrico planteado por Aristarco implica la rotación de la Tierra sobre su eje.

Fue Copérnico (1473-1543 d.c.) alrededor de 1530 quien planteó un modelo heliocéntrico que explicaba el movimiento rotacional y el de translación de la Tierra y de los Planetas; colocaba al Sol como una estrella más del Universo. De haber realizado el experimento de Foucault en ese entonces el asunto hubiese quedado dilucidado de una vez por todas.

De 1610 a 1633 el planteamiento de la teoría heliocéntrica basada en la deducción de observaciones le costó a Galileo un largo cuestionamiento por parte de la Inquisición que terminó en un juicio que lo condenó.

Aún ahora que está plenamente demostrada y aceptada por la ciencia y por la cultura general la teoría heliocéntrica, muchas personas creen en el modelo geocéntrico. De acuerdo a encuestas realizadas de 1999 al 2006 uno de cada cinco norteamericanos cree que el Sol da vueltas a la Tierra, y según encuestas realizadas en 2011 un tercio de los rusos cree también que es el Sol el que se mueve. (Wikipedia, teoría heliocéntrica).

Otros trabajos de Foucault.

Genio experimental, Foucault desarrolló experiencias que fueron esenciales para el desarrollo de la ciencia. Entre muchas otras, elegimos mencionar las siguientes.

En 1843 Foucault construye uno de los primeros telégrafos de carátula, un telégrafo de señales convencional, análogo al de Morse y un telégrafo de teclas. En 1845 Foucault y Fiseau logran las primeras fotografías del Sol que muestran las manchas solares. Además colaboró para establecer el método para tomar fotografías con un microscopio.

En 1848 Foucault desarrolla y construye la primera lámpara de carbón realmente útil. En abril de 1850 realizó un experimento que demostraba que la luz viaja más despacio en el agua

que en el aire y eso corroboraba lo predicción de la teoría ondulatoria de la luz.

En 1852 Foucault inventó el giroscopio que fue otra manera de demostrar la rotación de la tierra. El giroscopio fue un invento que en su época no tuvo mucha repercusión pero que ahora reconocemos por su uso extendido para la navegación aérea, la orientación de telescopios, etc.

En 1857 inventó el polarizador que lleva su nombre y concibió un método para probar la esfericidad de los espejos para telescopio lo que facilitó y mejoró su fabricación. En 1862 determinó la velocidad de la luz con un error de 0.6 % del valor aceptado actualmente. (Fascículo sobre Léon Foucault en la Wikipedia).

El Péndulo de la CIACYT.

La gran altura del hall de entrada al edificio de la CIACYT estaba predestinada para alojar el péndulo de Foucault como un símbolo elegante, sencillo y profundo de la generación de conocimiento científico.

Cuando surgió el proyecto de la CIACYT, vimos los planos del hall de entrada ya en construcción y propusimos la idea de construir el péndulo.

Se preparó un anclaje mecánico que fue colado en concreto en el techo del hall, con el apoyo del director de la CIACYT (Dr. Hugo Navarro), del arquitecto del edificio (Arq. Roberto Carlos Legaspi) y del Ingeniero de la obra (Marcos Bocanegra). El entusiasmo del Dr. Yuri Nahmad del Instituto de Física contribuyó para que se realizara el proyecto.

Así como Foucault no hubiera podido construir su péndulo monumental sin el ingenio del instrumentista Gustav Froment, así nosotros recurrimos a quienes saben hacer las cosas en nuestra Universidad.

Primeramente al Laboratorio del CCIM (Centro de Capacitación en Ingeniería de Materiales) a cargo del Ing. Alonso de la Garza San Miguel en donde se fundió el péndulo, y a su equipo, Omar Noyola López, Martín Rojas Cabrera y Mario Armando Robledo Gómez.

El maquinado del anclaje fue hecho por el Maestro Ezequiel Ontiveros quien realizó el acabado fino del péndulo y el diseño y construcción del pivote.

El diseño de la base para soportar el ancla fue concebido y realizado en la Facultad del Hábitat bajo la dirección de Gerardo Ramos auxiliado por Juan Rodríguez.

El diseño y realización del mural es creación del pintor potosino Jesús Ramos.

Péndulos célebres en México.

Hay cientos de péndulos de Foucault en el mundo, pero en México tenemos además del péndulo de la CIACYT el péndulo del Centro Educativo y Cultural «*Manuel Gómez Morín*» del estado de Querétaro. También hay un péndulo monumental en la Catedral de México que sirve para medir el avance de su inclinación debido a los hundimientos del terreno en Ciudad de México.

Referencias.

1. Le pendule de Foucault au Musée des Arts et Métiers, rédaction de Jacques Foiret, Bruno Jacoby et Jacques Payen, Musée National des Techniques Conservatoire National des Arts et Métiers, Editions Carré, Paris, 1990
2. Léon Foucault: Le miroir et le pendule. Par William Tobin, physicien et astronome néozélandais, Adaptation française de James Lequeux, EDP Sciences 2002. Édition originale : William Tobin, *The man who proved the world turned round*. Cambridge University 2002

Tabla de conversión cgs-SI

Cantidad	SI	CGS	Conversión
Distancia	metro [m]	centímetro [cm]	$1\text{ m} = 10^2\text{ cm}$
Tiempo	segundo [s]	segundo [s]	$1\text{ s} = 1\text{ s}$
Masa	kilogramo [kg]	gramo [g]	$1\text{ kg} = 10^3\text{ g}$
Energía	joule [J]	ergio [erg]	$1\text{ J} = 10^7\text{ erg}$
Carga eléctrica	coulomb [C]	statcoulmb	$1\text{ C} = 3 \times 10^9\text{ statcoulmb}$
Corriente eléctrica	ampere [A]	statampere	$1\text{ A} = 3 \times 10^9\text{ statampere}$
Potencial	volt [V]	statvolt	$1\text{ V} = (1/300)\text{ statvolt}$
Resistencia	ohm [Ω]	statohm	$1\text{ }\Omega = (1/9) \times 10^{-11}\text{ statohm}$
Capacitancia	farad [F]	statfarad [cm]	$1\text{ F} = 9 \times 10^{11}\text{ cm}$
Flujo magnético	weber [Wb]	maxwell	$1\text{ Wb} = 10^8\text{ maxwell}$
Inducción magnética	tesla [T]	gauss	$1\text{ T} = 10^4\text{ gauss}$

Tomada de la referencia [19].

Los valores 3 y $9 = 3^2$ que aparecen en la columna de conversión son una aproximación que resulta de tomar la velocidad de la luz $c \approx 300,000\text{ km/s}$. En lugar de 3 el valor exacto sería 2.99792458

Bibliografía

- [1] V. Afraimovich, E. Ugalde and J. Urías, *Fractal dimensions for Poincaré recurrences*. Elsevier (2006),
- [2] T.M. Apostol, *Calculus II*. Editorial Reverté (1984).
- [3] V.I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer (1983).
- [4] P. Blanchard, R.L. Devaney y G.R. Hall, *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson Editors (1999).
- [5] B.V. Chirikov, Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity. Preprint No 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1969) (in Russian) [Engl. Transl., CERN Trans. 71 - 40, Geneva, October (1971), Translated by A.T.Sanders. Link: <https://www.quantware.ups-tlse.fr/chirikov/refs/chi1969e.pdf>].
- [6] B. Chirikov and D. Shepelyansky, Chirikov standard map. Scholarpedia; link: http://www.scholarpedia.org/article/Chirikov_standard_map
- [7] J.U. Cisneros Parra, *Mecánica clásica, 3a edición*. Ediciones del Instituto de Física, UASLP (2022).
- [8] Paul Glendinning, *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge UPress (1994).
- [9] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th edition. Academic Press.
Accesible en <http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/TISPISGIMR.pdf>
- [10] H. Kruglak and R. Pittet, The Caruso legend lives on. The Physics Teacher **17** (1979) 49.
- [11] S. Lang, *Álgebra lineal*. Fondo Educativo Interamericano (1976).
- [12] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Second edition. Academic Press (1999).
- [13] J.E. Marsden y A.J. Tromba, *Cálculo vectorial. Quinta edición*. Pearson, Addison Wesley (2004).
- [14] Pedro Miramontes, *Río de tiempo y agua. Procesos y estructuras en la Ciencia de nuestros días*. Ediciones del Instituto de Física, UASLP (2024).
- [15] Andrew Pressley, *Elementary differential geometry*. Springer Undergraduate Math. Series (2001).
- [16] Karen Schrock, Can the high C of a trained soprano quiver glass into dissolution? Scientific American, August 23, 2007.

- [17] M.R. Spiegel, *Theoretical mechanics*. Schaum Publishing Co. (1967).
- [18] S.T. Thornton and J.B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems. 5th edition*. Brooks/Cole, a division of Thomson Learning Inc. (2004).
- [19] Jesús Urías, *Introducción a la física cuántica*. Ediciones del Instituto de Física, UASLP (2021).
- [20] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of modern analysis*. Fourth edition. Cambridge UPress (1969).
- [21] G.M. Zaslavsky, *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. Oxford UPress (2005).