

Convergencia al estado base en sistemas unidimensionales

Edgardo Ugalde¹

Instituto de Física
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

DIM–Universidad de Chile
Julio 2010

¹En colaboración con J.-R. Chazottes y J.-M. Gambaudo

Contenido

- 1 Antecedentes
 - Optimización Ergódica
 - Medidas Límite
 - Preliminares
- 2 Nuestro Resultado
 - Nuestro Teorema
 - El Algoritmo
 - Algunos Ejemplos
- 3 Comentarios Finales
- 4 Despedida

¿De que se trata la optimización ergódica?

Sea (X, T) un sistema dinámico y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un observable semicontínuo por arriba.

$\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ es maximizante para ϕ si

$$\int_X \phi(x) d\mu(x) = \bar{\phi} := \max_{\nu \in \mathcal{M}_T(X)} \int_X \phi(x) d\nu(x)$$

Preguntas básicas:

- ¿Cuáles son las medidas maximizantes para un ϕ dado?
- ¿Cómo cambia este conjunto con ϕ ?
- ¿Cómo cambian el soporte y la entropía de las medidas maximizantes con ϕ ?

Sea $\mathcal{M}_{\max}(\phi) := \{\mu \in \mathcal{M}_T(X) : \bar{\phi} = \int_X \phi(x) d\mu(x)\}$.

Teorema

Si X es un espacio métrico compacto, $T : X \rightarrow X$ es continua, y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua por arriba, entonces

- $\mathcal{M}_{\max}(\phi) \neq \emptyset$.
- $\mathcal{M}_{\max}(\phi)$ es un simplejo (simplex) de Choquet.
- Los extremos de $\mathcal{M}_{\max}(\phi)$ son todas las medidas ergódicas de $\mathcal{M}_{\max}(\phi)$.

Teorema

Si X es un espacio métrico compacto y $T : X \rightarrow X$ es continua, entonces $\mathcal{U} := \{\phi \in E : \#\mathcal{M}_{\max}(\phi) = 1\}$ es denso en $C^0(X)$.

Teorema

Sea X es un espacio métrico compacto y $T : X \rightarrow X$ una transformación continua. Para cada conjunto cerrado de medidas ergódicas $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_T(X)$, existe $\phi \in C^0(X)$ tal que

$$\mathcal{M}_{\max}(\phi) = H_{\text{convex}}(\mathcal{E}).$$

Para $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua por arriba y $\beta \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$P(\beta \phi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, \varepsilon)}{n}, \text{ donde}$$

$$N(n, \varepsilon) := \max_{E \text{ es } (n, \varepsilon)\text{-separado}} \sum_{x \in E} e^{\beta \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k(x)}.$$

El simplejo de estados de equilibrio correspondiente es:

$$Eq(\beta \phi) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T(X) : P(\beta \phi) = \beta \int_X \phi(x) d\mu(x) + h(\mu) \right\}.$$

Teorema

Para $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua por arriba tenemos

$$\int_X \phi(x) d\nu(x) + \frac{h(\nu)}{\beta} \leq \frac{P(\beta)}{\beta},$$

para cada $\nu \in \mathcal{M}_T(x)$ y $\beta > 0$.

Sea $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia divergente y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mu_n \in \text{Eq}(\beta_n \phi)$.

Corolario

Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \in \mathcal{M}_{\max}(\phi)$.

Observables de rango finito en subshifts

De aquí en adelante:

- X es un subshift transitivo de tipo finito en el alfabeto A .
- $T : X \rightarrow X$ es el shift a la izquierda.
- El observable $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es de rango finito, *i.e.*, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_{-r} \cdots x_r = y_{-r} \cdots y_r \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$.

Proposición

Para X , T y ϕ como arriba, y para cada $\beta \in \mathbb{R}^+$,

$$Eq(\beta\phi) = \{\mu_{\beta\phi}\}.$$

Mas aún, $\mu_{\beta\phi}$ es una cadena de Markov de $2r$ pasos de memoria.

Teorema (Brémont 2003)

Si X es mezclante, entonces

$$\mu_{\phi}^* := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta\phi} \text{ existe.}$$

Ademas $\#\{\mu_{\phi}^ : \phi \text{ is of range } r\} < \infty$.*

$\mathcal{M}_{\max}(\phi)$ para ϕ de rango finito

Para ϕ de rango finito tenemos que

$$X_{\max}(\phi) := \cup_{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\phi)} \text{supp}(\mu)$$

es un subshift de tipo finito no necesariamente transitivo.

En este caso

$$\mathcal{M}_{\max}(\phi) := H_{\text{convex}}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N),$$

donde μ_k denota la medida de entropía máxima para el subshift transitivo $\bar{X}_k \subset X_{\max}(\phi)$, y $X_{\max}(\phi) \equiv \sqcup_{k=1}^N \bar{X}_k$.

Para $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder continua y para cada $\beta > 0$,

$$Eq(\beta\phi + \psi) = \{\mu_{\beta\phi + \psi}\}.$$

Teorema (Leplaideur 2006)

Si ϕ es de rango finito $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es Hölder continua, entonces $\mu_{\phi, \psi}^* := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta\phi + \psi}$ existe. Además

$$\mu_{\phi, \psi}^* := \sum_{k=1}^N c_k \mu_{\psi, k},$$

donde $\{\mu_{\psi, k}\} \equiv Eq(\psi | \bar{X}_k)$, y $c_k = 0$ siempre que $P(\psi | \bar{X}_k) < P(\psi | X_{\max}(\phi))$.

Convergencia una vez mas

Si ϕ y ψ son de rango finito entonces

$$\mu_{\phi, \psi}^* := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta\phi + \psi} = \sum_{k=1}^N c_k \mu_{\psi, k}.$$

Teorema (Chazottes, Gambaudo, U. 2010)

Los coeficientes c_k en la descomposición de la medida límite se pueden calcular por medio de un algoritmo recursivo. Mas aun, existe β_0 y $C > 0$ tal que

$$|\mu_{\beta\phi + \psi}[x_0 \cdots x_n] - c_k \mu_{\psi, k}[x_0 \cdots x_n]| \leq e^{-\beta C}$$

para cada $\beta \geq \beta_0$ y todo $x \in X$ tal que $[x_0 \cdots x_n] \cap \bar{X}_k \neq \emptyset$.

Renormalización

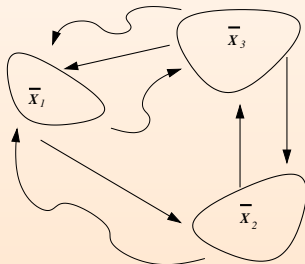
$$X_{\max}(\phi) := \cup_{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\phi)} \text{supp}(\mu) = \sqcup_{k=1}^N \bar{X}_k.$$

\bar{X}_k es una “componente pesada” si $P(\psi|\bar{X}_k) = P(\psi|X_{\max}(\phi))$.

Sea N_ϕ el número de componentes pesadas. En $A' = \{1, 2, \dots, N_\phi\}$ definimos el subshift transitivo de tipo finito $X' \subset A'^{\mathbb{Z}}$.

Definimos también $\phi', \psi' : A' \times A' \rightarrow \mathbb{R}$ maximizando $P(\psi)$ y la suma

$$\sum_n \phi \circ T^n.$$



Entrada: $X \subset A^{\mathbb{Z}}$, ϕ y ψ .

- 1 Calcule $X_{\max}(\phi) \equiv \sqcup_{k=1}^N \bar{X}_k$.
- 2 Si $P(\psi|\bar{X}_k) < P(\psi|X_{\max}(\psi))$, entonces $c_k = 0$.
- 3 Renormalización: Calcule $X' \subset A'^{\mathbb{Z}}$, ϕ' y ψ' , y a partir de ello $X_{\max}(\phi') \equiv \sqcup_{j=1}^{N'} \bar{X}'_j$ y A'' .
- 4 Si $k \in A'$ es tal que $[k] \cap \left(\cup_{j=1}^{N'} \bar{X}'_j \right) = \emptyset$, entonces $c_k = 0$.
De otra forma $c_k = c'_j \times \mu_{\psi',j}[k]$, donde $A'' \ni j \ni k$.
- 5 Repita lo pasos de (1) a (4) con entrada $X' \subset A'^{\mathbb{Z}}$, ϕ' y ψ' , y de ahí calcule c'_j .

Un baricentro irracional

$$X = \{a, b, c, d\}^{\mathbb{Z}}, \psi = 0 \text{ y}$$

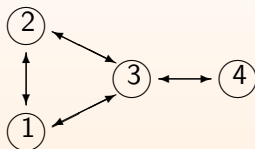
$$\phi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso $X_{\max}(X) = \text{Per}_1(X) := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, entonces

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta\phi} = c_1\delta_{\mathbf{a}} + c_2\delta_{\mathbf{b}} + c_3\delta_{\mathbf{c}} + c_4\delta_{\mathbf{d}}.$$

Un baricentro irracional

El subshift renormalizado X' se define por el grafo



con $\phi'(k, j) = 1$ y $\psi'(k, j) = 0$.

Solo hay una componente pesada, por lo tanto

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \mu_{\beta\phi} = \frac{\delta_{\mathbf{a}} + \delta_{\mathbf{b}}}{2(4 - \rho)} + \frac{(\rho - 1)^2 \delta_{\mathbf{c}}}{2(4 - \rho)} + \frac{(\rho - 1)^2 \delta_{\mathbf{d}}}{2\rho^2(4 - \rho)},$$

donde $\rho = \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{10} \cos(\frac{1}{3} \arctan(3\sqrt{111})))$.

Renormalización en dos pasos

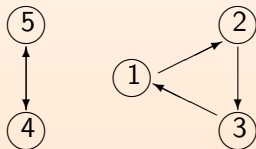
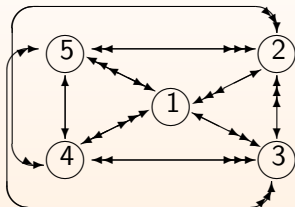
$$X = \{a, b, c, d, e\}^{\mathbb{Z}}, \psi = 0 \text{ y}$$

$$\phi := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso $X_{\max}(X) = \text{Per}_1(X) := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$, por lo tanto

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta\phi} = c_1\delta_{\mathbf{a}} + c_2\delta_{\mathbf{b}} + c_3\delta_{\mathbf{c}} + c_4\delta_{\mathbf{d}} + c_5\delta_{\mathbf{e}}.$$

Renormalización en dos pasos



- Hay un observable Hölder continuo ϕ tal que $(\mu_{\beta\phi})_{\beta>0}$ no converge cuando $\beta \rightarrow \infty$ (Chazottes–Hochman 2010).
- En dimensiones mayores hay un observable de rango finito ϕ tal que $(\mu_{\beta\phi})_{\beta>0}$ no converge cuando $\beta \rightarrow \infty$.
- La convergencia depende de la estructura de $X_{\max}(\phi)$.
- Además de la renormalización, la prueba de nuestro resultado se basa en aproximaciones al estado de equilibrio por medio de medidas con soporte en órbitas periódicas. Es aquí donde aparece el Perron–Frobenius refinado.

¡Muchísimas Gracias!

