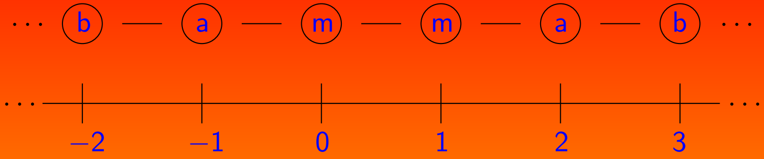
Formalismo Termodinámico de Sistemas Unidimensionales en Red

Edgardo Ugalde

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Noviembre 2007

El Plan



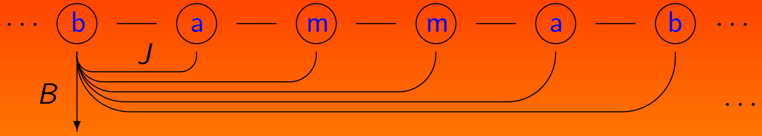
$$H_N(\omega) := \sum_{-N \leqslant n < m \leqslant N} J(\omega_n, \omega_m) 3^{-|m-n|} + \sum_{-N \leqslant n \leqslant N} B(\omega_n)$$

$J =$

	b	m	a
b	0	ι	2ι
m	ι	0	ι
a	2ι	ι	0

$B =$

b	m	a
0	b	$2b$



$$\bar{H}_N(\omega) := \sum_{n=-N}^{N} \phi(\omega_n \omega_{n+1} \omega_{n+2} \cdots)$$

$$\phi(\omega_n \omega_{n+1} \omega_{n+2} \cdots) = B(\omega_n) + \sum_{j=1}^{\infty} J(\omega_n, \omega_{n+j}) 3^{-j}$$

La Probabilidad

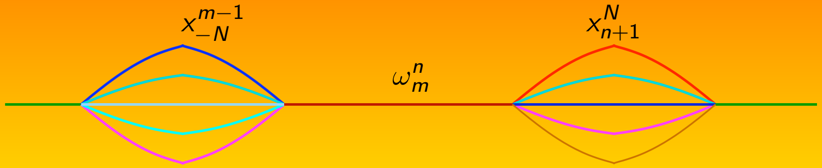
$$x_m^n := x_m x_{m+1} \cdots x_n,$$

$$\mathbb{P}_\beta^{(N)}(x_m^n = \omega_1^{n-m}) \quad := \quad \frac{\displaystyle\sum_{x \in \{b,m,a\}^{[-N,N]}:\ x_m^n = \omega_1^{n-m}} e^{-\beta H_N(x)}}{\mathcal{Z}_\beta^{(N)}}$$

$$\mathcal{Z}_\beta^{(N)} \quad := \quad \sum_{x \in \{b,m,a\}^{[-N,N]}} e^{-\beta H_N(x)}$$

$$\bar{\mathbb{P}}_\beta^{(N)}(x_m^n = \omega_1^{n-m}) := \frac{\displaystyle\sum_{x\in\{b,m,a\}^{[-N,N]}:\ x_m^n=\omega_1^{n-m}} e^{-\beta \bar{H}_N(x\cdots)}}{\bar{\mathcal{Z}}_\beta^{(N)}}$$

$$\approx \mathbb{P}_\beta^{(N)}(x_m^n = \omega_1^{n-m})$$

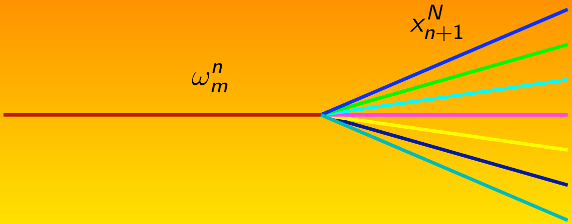


El Límite Termodinámico

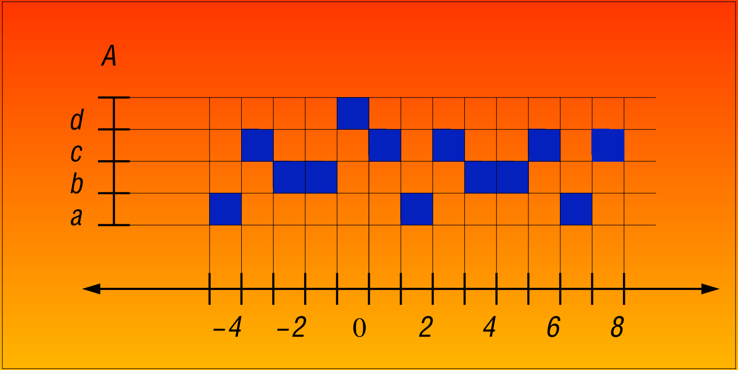
$$\bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m}) := \lim_{N\to\infty} \bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m})$$

$$e^{-K_\beta}\, \bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m}) \leqslant e^{(n-m)P_\beta - \beta\sum_{s=m}^n \phi(x_s^\infty)} \leqslant e^{K_\beta}\, \bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m})$$

$$\phi(x_s^\infty) := B(x_s) + \sum_{j=1}^{\infty} J(x_s, x_{s+j}) 3^{-j}, \quad P_\beta := -\lim_{N\to\infty} \frac{\log(\bar{\mathcal{Z}}_\beta(N))}{2N+1}$$



Energía Local



Espacio de Configuraciones	Energía Local
$X := A^{\mathbb{Z}}$	$\phi : X \to \mathbb{R}$

Medidas de Gibbs son Estados de Equilibrio

Teorema (Bowen, Ruelle, y otros)

Para cada "buena" energía local $\phi : X \to \mathbb{R}$*, y para cada* $\beta \geqslant 0$*, hay una "única" medida de probabilidad* $\bar{\mathbb{P}}_\beta$ *que cumple*

$$e^{-K_\beta} \leqslant \frac{\bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m})}{e^{(n-m)P_\beta - \beta\sum_{s=m}^n \phi(x_s^\infty)}} \leqslant e^{K_\beta},$$

para cada $\omega \in A^{n-m}$*.*

$\bar{\mathbb{P}}_\beta$ es la medida de equilibrio para la energía local ϕ, correspondiente a la temperatura inversa β

Ejemplo

Una cadena de Markov estacionaria $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A define una medida de Gibbs con energía local

$$\phi(x_m^\infty) = \frac{\log \mathbb{P}(X_1 = x_{m+1} | X_0 = x_m)}{\beta}$$

En este caso

$$\mathbb{P}(x_m^n = \omega_1^{n-m}) \approx \exp\left(\beta \sum_{s=1}^{n-m} \phi(x_s^\infty)\right)$$

$$\cdots \; \mathrm{b} \longrightarrow \mathrm{a} \longrightarrow \mathrm{c} \longrightarrow \mathrm{c} \longrightarrow \mathrm{a} \longrightarrow \mathrm{d} \; \cdots$$

Beneficios Conocidos

$$P_\beta = \beta \int_X \phi(x) d\bar{\mathbb{P}}_\beta(x) - h(\bar{\mathbb{P}}_\beta)$$

$$h(\bar{\mathbb{P}}_\beta) := - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\omega \in A^{[-N,N]}} \bar{\mathbb{P}}_\beta(\omega) \log(\bar{\mathbb{P}}_\beta(\omega))}{2N+1}$$

$$\frac{dP_\beta}{d\beta} = \int_X \phi(x) d\bar{\mathbb{P}}_\beta(x)$$

Para alfabetos numéricos, $A \subset \mathbb{R}$, tenemos el

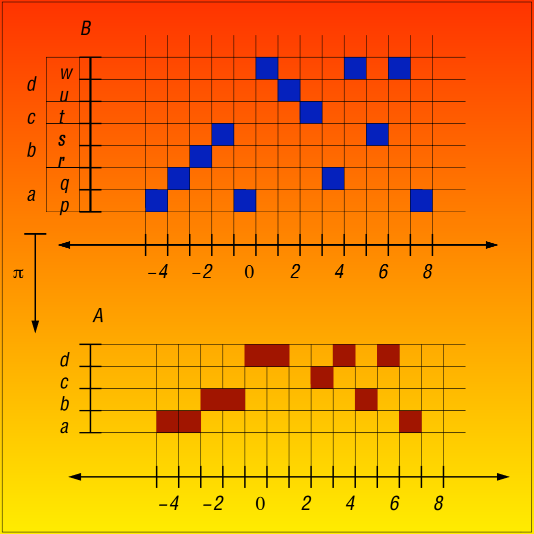
Teorema del Límite Central

$$\bar{\mathbb{P}}_\beta \left(\frac{\sum_{s=-N}^{N} \left(x_s - \bar{\mathbb{E}}_\beta(x_s)\right)}{\sqrt{2\pi(2N+1)}\sigma} \leqslant t \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-y^2} dy$$

con

$$\sigma^2 := \bar{\mathbb{E}}_\beta \left((x_s - \bar{\mathbb{E}}_\beta(x_s))^2 \right)$$

La proyección



Resultado

$$(B^{\mathbb{Z}}, \bar{\mathbb{P}}_\beta(\psi)) \xrightarrow{\pi} (A^{\mathbb{Z}}, \bar{\mathbb{P}}_\beta(\phi))$$

Medida de Gibbs
$\rightsquigarrow$ buena energía local

Medida de Gibbs
$\rightsquigarrow$ buena energía local

Teorema (Chazottes & U, 2007)

Proyecciones de medidas de Gibbs asociadas a buenas energías locales son medidas de Gibbs asociadas a buenas energías locales

Resultado Preparatorio

$$(B^{\mathbb{Z}}, \bar{\mathbb{P}}_\beta(\psi)) \xrightarrow{\pi} (A^{\mathbb{Z}}, \bar{\mathbb{P}}_\beta(\phi))$$

Markoviana $\rightsquigarrow$ alcance acotado

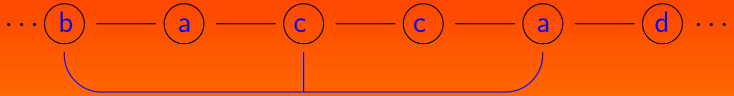
Medida de Gibbs $\rightsquigarrow$ buena energía local

Teorema (Chazottes & U, 2003)

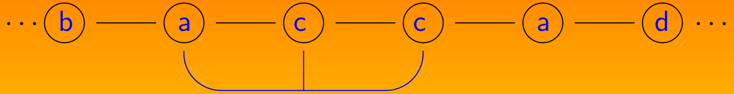
Proyecciones de medidas de Markov (interacción de alcance acotado) son medidas de Gibbs asociada a una buena energía local.

Ver también el resultado sobre aproximaciones

Recortando el alcance de la interacción



$$\phi_r \rightsquigarrow \bar{\mathbb{P}}_{\beta,r}$$



$$\phi_{r-1} \rightsquigarrow \bar{\mathbb{P}}_{\beta,r-1}$$

Límite Proyectivo

Decimos que $\mathrm{limpro}_{\mathrm{r}\to\infty}\bar{\mathbb{P}}_{\beta,\mathrm{r}} = \bar{\mathbb{P}}_\beta$ si existe $\{\varepsilon_r > 0\}_{r\in\mathbb{N}}$ convergente a 0, tal que

$$e^{-\varepsilon_r} \leqslant \frac{\bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m})}{\bar{\mathbb{P}}_{\beta,r}(x_m^n = \omega_1^{n-m})} \leqslant e^{\varepsilon_r}.$$

Teorema (Chazottes, Ramírez & U, 2005)

Si la energía local es buena, entonces

$$\mathrm{limpro}_{\mathrm{r}\to\infty}\bar{\mathbb{P}}_{\beta,\mathrm{r}} = \bar{\mathbb{P}}_\beta.$$

Límite Débil

Decimos que $\mathrm{limdeb}_{\beta\to\infty}\bar{\mathbb{P}}_\beta = \mathbb{P}$ si

$$\lim_{\beta\to\infty}\bar{\mathbb{P}}_\beta(x_m^n = \omega_1^{n-m}) = \mathbb{P}(x_m^n = \omega_1^{n-m}),$$

Convergencia al Estado Base

Teorema (Brémont 2003, Leplaideur 2005)

Para cada energía local de alcance acotado, existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ tal que

$$\mathrm{limdeb}_{\beta\to\infty}\bar{\mathbb{P}}_\beta = \mathbb{P}.$$

Medidas Microcanónicas

Dado $\{\varepsilon_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ convergente a 0 y $e \in \phi(X)$, llamamos medidas microcanónicas a las distribuciones

$$\mathbb{P}_{N,e}(x_m^n = \omega_1^{n-m}) = \frac{\#\{\omega \in A^{[-N,N]} : \mathbf{x}_m^n = \omega_1^{n-m} \text{ y } H_N(\omega) = e \pm \varepsilon_N\}}{\#\{\omega \in A^{[-N,N]} : \ H_N(\omega) = e \pm \varepsilon_N\}}.$$

Equivalencia Fuerte de Ensambles

Teorema (Adams 2001)

Para cada energía local de alcance $r = 1$, y para cada $\beta \in \mathbb{R}^+$, si $e = \mathbb{E}_\beta(\phi)$ entonces

$$\mathrm{limdeb}_{\mathrm{N}\to\infty}\mathbb{P}_{\mathrm{N,e}} = \bar{\mathbb{P}}_\beta.$$

Convergencia Proyectiva

Para extender

- equivalencia fuerte,
- convergencia al estado,

a interacciones de alcance arbitrario que den lugar a buenas energías locales.

¡Muchas Gracias!

Presentación disponible en:
`http://www.ifisica.uaslp.mx/~ugalde`