Una Dinámica Regulatoria Discreta

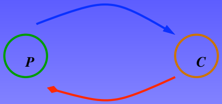
Edgardo Ugalde

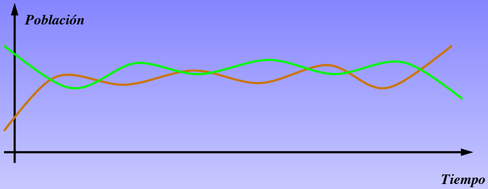
Instituto de Física, UASLP

Coloquio del Instituto de Matemáticas
Morelia, 12 de Marzo del 2008

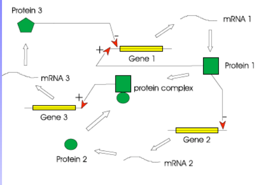
Contenido

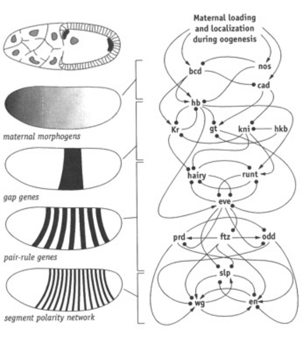
Predador–Presa



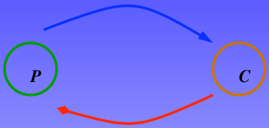


Regulación Genética





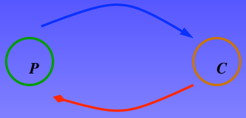
Redes Lógicas o Booleanas

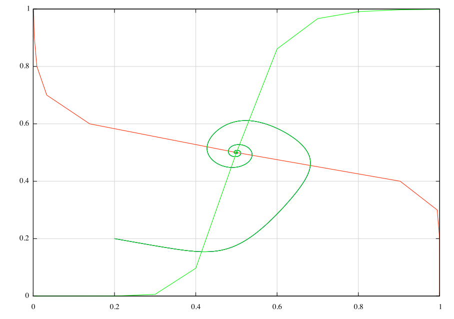


t	X_P^t	X_C^t
0	1	1
1	0	1
2	0	0
3	1	0
4	1	1

$$\begin{aligned} X_P^{t+1} &= \neg X_C^t \\ X_C^{t+1} &= X_P t \end{aligned}$$

Ecuaciones Diferenciales Acopladas





$$
\begin{aligned}
\frac{dx_P}{dt} &= -x_P + \kappa_{P,C}\left(1 - \frac{x_C^m}{x_C^m + \theta_C^m}\right) \\
\frac{dx_C}{dt} &= -x_C + \kappa_{C,P}\frac{x_P^m}{x_P^m + \theta_P^m}
\end{aligned}
$$

Programa de Thomas

Teorema (Gouzé)

Consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n.$$

Supongamos que el signo del Jacobiano no cambia en $\mathcal{D}$. Si todos los circuito del grafo de interacción son no positivos, y si hay al menos un término no nulo en la expansión del determinante del signo del Jacobiano, entonces f es inyectiva en $\mathcal{D}$, y por lo tanto hay a lo más un punto de equilibrio.

Teorema (Gouzé)

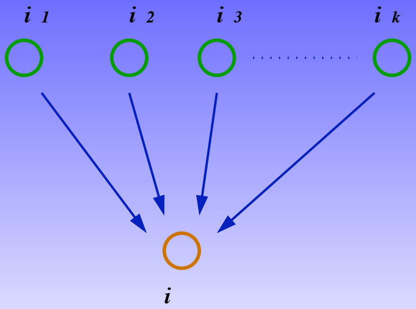
Consideremos el sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n.$$

Supongamos que el signo del Jacobiano no cambia en $\mathcal{D}$. Si todos los semicircuito de longitud $2 \leqslant p \leqslant n$ del grafo de interacción son no negativos. Entonces no hay trayectorias periódicas atractivias. Además, si el grafo de interacciones es fuertemente conexo, entonces casi toda trayetoria converge a un punto de equilibrio o diverge.

Las redes Booleanas de Kauffman

$$\mathcal{F} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n, \qquad \mathcal{F}(\mathbf{x})_i = F_i(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_K})$$



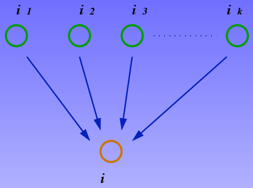
Resultados Empíricos

$$\rho = \mathbb{P}\left(F_i(\mathbf{a}) \neq F_i(\mathbf{b}) : \ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{0,1\}^K \right)$$

$$\mathbb{E}(\#\text{ciclos}) \to \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \text{si } \rho < 1/K, \\ \mathcal{O}(\sqrt{N}) & \text{si } \rho = 1/K, \\ \mathcal{O}(N) & \text{si } \rho > 1/K. \end{cases}$$

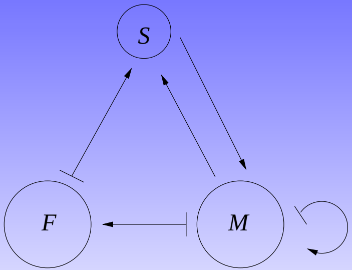
Redes Regulatorias Discretas

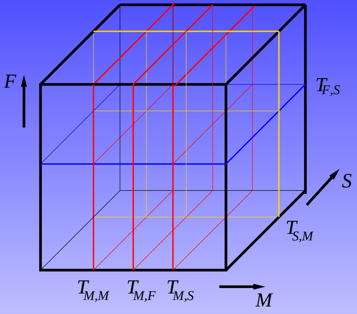
$$\mathcal{F} : [0,1]^n \to [0,1]^n \qquad \mathcal{F}(\mathbf{x})_i = a\mathbf{x}_i + (1-a)D_i(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{d(i)}})$$



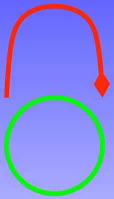
$$D_i(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{d(i)}}) = \frac{1}{d(i)} \sum_{j=1}^{d(i)} H(\sigma_{i,i_j}(\mathbf{x}_{i_j} - T_{i,i_j}))$$

$$D_i : [0,1]^n \to \{e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,\ell(i)}\} \subset [0,1]^n$$

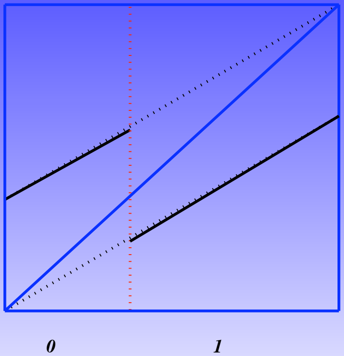




Dinámica Simbólica



$$F(x) = ax + (1-a)H(T-x)$$



Teorema (Coutinho)

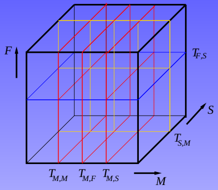
Consideremos la contracción por pedazos

$$F(x) = ax + (1-a)H(T-x), \quad x \in [0,1].$$

Sea $\Lambda = \cap_{t=0}^{\infty} F^{-t}([0,1])$. *Entonces existe* $\nu = \nu(a,T)$, *y una transformación contínua* $\phi : \Lambda \to [0,1]$ *tal que*

$$\phi \circ F(x) = \phi(x) + \nu \pmod 1, \quad \forall x \in \Lambda.$$

Complejidad Simbólica



Se define una codificación:

$$\mathbf{x} \longrightarrow (I_0, I_1, \ldots,) \in A^{\mathbb{N}} \quad F^t(\mathbf{x}) \in I_t.$$

La complejidad es:

$$C(\tau) := \#\{(I_0, \ldots, I_\tau) : \ (I_t)_{t=0}^{\infty} \text{ admisible } \}$$

Teorema (U. Lima)

Consideremos la contracción por pedazos del tipo

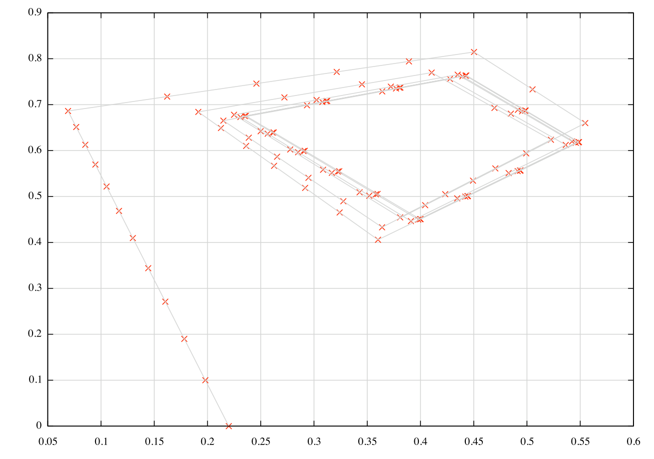
$$\mathcal{F} : [0,1]^n \to [0,1]^n \quad \mathcal{F}(\mathbf{x})_i = a\mathbf{x}_i + (1-a)D_i(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{d(i)}}).$$

Si los dominios de continuidad de las funciones D_i son rectángulos, entonces existe $a_0 > 0$ tal que para todo $0 \leqslant a < a_0$ tenemos

$$C(\tau) \leqslant 1 + (P-1)(1 + (P-1)^n \tau^n), \quad \forall \tau \in \mathbb{N}.$$

Aquí P=número de dominios de continuidad de F.

Convergencia a órbitas periódicas



Teorema (U. Lima)

Consideremos la contracción por pedazos del tipo

$$\mathcal{F} : [0,1]^n \to [0,1]^n \quad \mathcal{F}(\mathbf{x})_i = a\mathbf{x}_i + (1-a)D_i(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_d(i)}).$$

Si los dominios de continuidad de las funciones D_i son rectángulos, entonces para cada $a \geqslant 0$ la probabilidad conjunta de escoger D_i y condiciones iniciales $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ tales que la órbita $\{F^t(\mathbf{x})\}$ converge a una órbita periódica es 1, es decir,

$$\mathbb{P}(\mathrm{dist}(\{F^t(\mathbf{x})\}, \mathrm{Per}(F)) \to 0) = 1.$$

Trabajos en Curso

- Más dinámica simbólica para redes pequeñas.
- Cotas inferiores para la complejidad.
- Ingeniería: subredes y sistemas abiertos.

Gracias