Mecánica Estadística

de Sistemas en Red

Edgardo Ugalde

Instituto de Física – Universidad Autónoma de San Luis Potosí

7a Reunión Metropolitana de Mecánica Estadística

EL PLAN

1. BREVE HISTORIA DEL TEMA
2. ¿DE QUÉ SE OCUPA LA TEORÍA?
3. LOS RESULTADOS QUE YO PREFIERO
4. COMENTARIOS FINALES

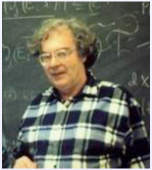
MI VERSIÓN DE ESTA HISTORIA


Ising (1925)


Peierls (1936)

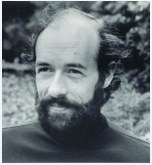

Onsager (1944)

MI VERSIÓN DE ESTA HISTORIA



Dobrushin (1968-9)

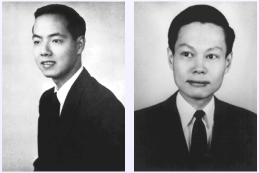
Lanford III (1968-9)



Ruelle (1968-9)

LÍMITE TERMODINÁMICO

MI VERSIÓN DE ESTA HISTORIA



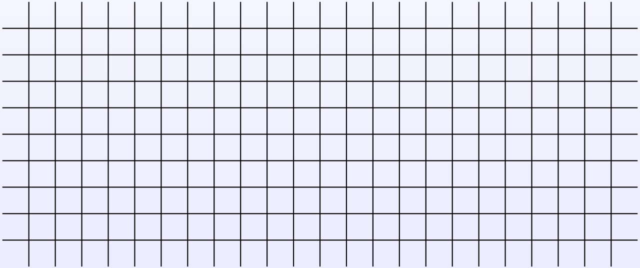
Lee–Yang (1952)

Pirogov–Sinai (1974-75)

TRANSICIÓN DE FASE

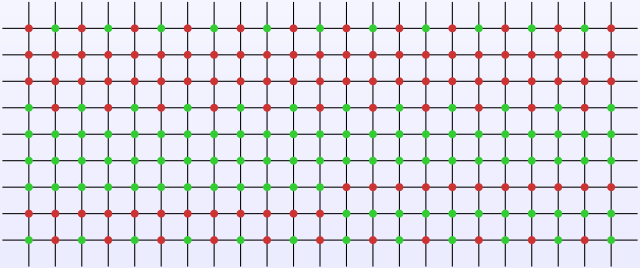
EL "SISTEMA FÍSICO"

ESPACIO FÍSICO $\mathbb{Z}^d$ (u otra red regular)



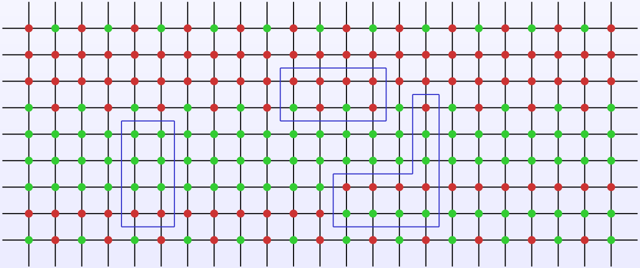
EL “SISTEMA FÍSICO”

ESPACIO FÍSICO	$\mathbb{Z}^d$ (u otra red regular)
CONFIGURACIONES	campos $\omega : \mathbb{Z}^d \to E$

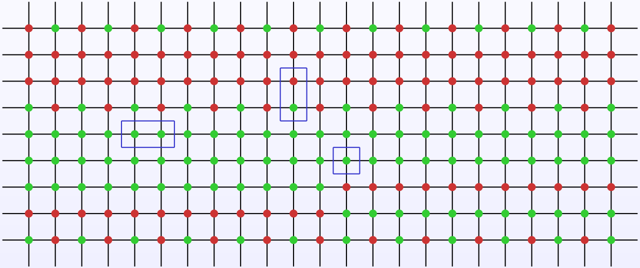


EL "SISTEMA FÍSICO"

ESPACIO FÍSICO	$\mathbb{Z}^d$ (u otra red regular)
CONFIGURACIONES	campos $\omega : \mathbb{Z}^d \to E$
INTERACCIONES	funciones $\phi_\Lambda : E^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$



MODELOS TIPO ISING



$$\begin{aligned}
\phi_{\{\mathbf{x}\}}(\omega) &= -h\,\varepsilon(\omega(\mathbf{x})) && \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \\
\phi_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}}(\omega) &= -J\,\delta_{\omega(\mathbf{x}),\omega(\mathbf{y})} && \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \text{ t. q. } |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = 1 \\
\phi_{\Lambda}(\omega) &= 0 && \forall\, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d \text{ t. q. } |\Lambda| > 2
\end{aligned}$$

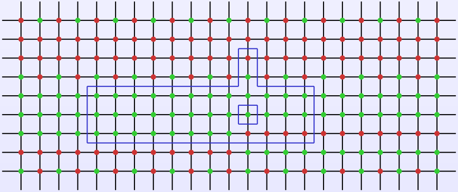
EL HAMILTONIANO

Para cada volumen finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$

$$H_\Lambda^\phi(\omega) = \sum_{\Lambda' \cap \Lambda \neq \emptyset} \phi_{\Lambda'}(\omega)$$

Caso tipo Ising

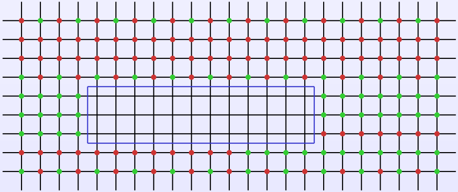
$$H_\Lambda^\phi(\omega) = -h \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \varepsilon(\omega(\mathbf{x})) - J \sum_{\substack{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \cap \Lambda \neq \emptyset \\ |\mathbf{x}-\mathbf{y}|=1}} \delta_{\omega(\mathbf{x}),\omega(\mathbf{y})}$$



Para cada volumen finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$
y para cada configuración externa $\eta \in E^{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$

$$\mu_\Lambda^{\beta\phi}(\omega|\eta) = \frac{e^{-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega \times \eta)}}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\beta\phi}(\eta)}$$

$$\mathcal{Z}_\Lambda^{\beta\phi}(\eta) = \sum_{\omega' \in E^\Lambda} e^{-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega' \times \eta)}$$



LA O LAS MEDIDAS DE GIBBS

La medida de probabilidad μ en $E^{\mathbb{Z}^d}$ es un medida de Gibbs si para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ y $\omega \in E^\Lambda$,

$$\eta \mapsto \mu(\omega|\eta) := \frac{e^{-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega\times\eta)}}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\beta\phi}(\eta)}$$

es la probabilidad condicional respecto a μ, de que el interior coincida con $\omega \in E^\Lambda$, dada la configuración exterior η.

O bien, si existen constantes $C_{\beta\phi} > 0$ y $P := P(\beta\phi) \in \mathbb{R}$ tales que

$$e^{-|\partial\Lambda|\, C_{\beta\phi}} \leqslant \frac{\mu([\omega])}{e^{-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega\times\eta) - |\Lambda|\, P(\beta\phi)}} \leqslant e^{|\partial\Lambda|\, C_{\beta\phi}},$$

UN POTENCIAL TERMODINÁMICO

La segunda presentación puede interpretarse como

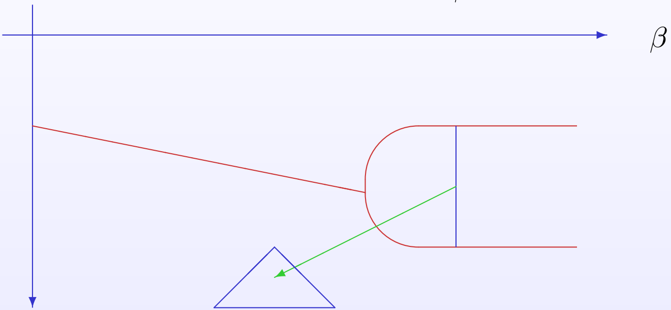
$$\mu([\omega]) \simeq e^{-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega\times\eta) - |\Lambda|\, P(\beta\phi)}$$

donde

$$P(\beta\phi) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} \frac{\log \mathcal{Z}_\Lambda^{\beta\phi}(\eta)}{|\Lambda|}$$

sin importar la configuracion externa η.

Dada la interacción ϕ



$\mathcal{G}(\beta)$

$\mathcal{G}(\beta)$ es un simplex

PRINCIPIO VARIACIONAL

Suponiendo que

- $\phi_{\Lambda+\mathbf{x}} = \phi_\Lambda$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ *(invariancia por translación)*
- $\sum_{\mathbf{0}\in\Lambda} ||\phi_\Lambda|| < \infty$ *(regularidad)*

entonces

$$P(\beta\phi) \geqslant s(\nu) - \beta\, \mathbb{E}_\nu(u_\phi)$$

para toda medida de probabilidad ν *invariante por translación.*

Aquí

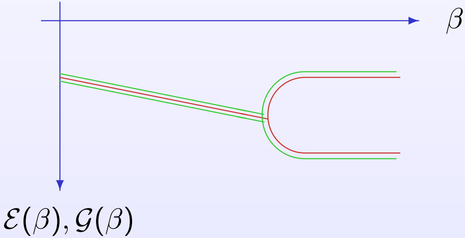
$$\begin{aligned} s(\nu) &:= \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} \frac{-1}{|\Lambda|} \sum_{\omega\in E^\Lambda} \mu([\omega]) \log \mu([\omega]) \\ u_\phi(\omega) &:= \sum_{\mathbf{0}\in\Lambda} \frac{\phi_\Lambda(\omega)}{|\Lambda|} \end{aligned}$$

ESTADOS DE EQUILIBRIO

La medida de probabilidad μ invariante por translación es un estado de equilibrio si

$$s(\mu) - \beta\ \mathbb{E}_{\mu}(u_{\phi}) = P(\beta\phi)$$

Toda medida de Gibbs es un estado de equilibrio, $\mathcal{E}(\beta) \supset G(\beta)$



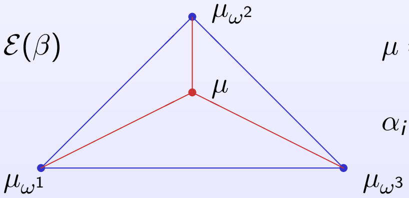
DESCOMPOSICIÓN ERGÓDICA

El conjunto de estado de equilibrio $\mathcal{E}(\beta)$ es un simplex y sus extremos son medidas ergódicas respecto a las translaciones. Tenemos en particular que

$$\mu := \int_{E^{\mathbb{Z}^d}} \mu_\omega \, d\mu(\omega)$$

para toda medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{E}(\beta)$.

Aquí $\mu_\omega \in \mathcal{E}(\beta)$ es la medida érgodica para la cual la configuración ω es típica.



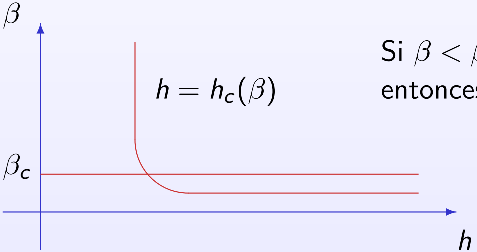
$\mu = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \, \mu_{\omega^i}$

$\alpha_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$

Región de unicidad (Dobrushin 1968)

Interacciones regulares, invariantes por translación

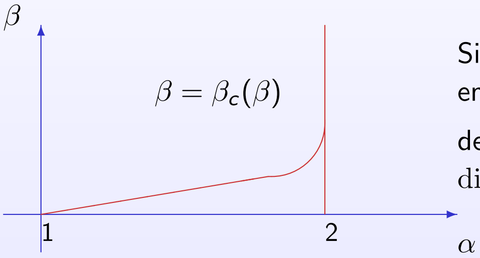
$$H_{\Lambda}^{\phi}(\omega) = -h \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \phi_{\mathbf{x}}(\omega) - \sum_{\substack{\Lambda' \cap \Lambda \neq \emptyset \\ |\Lambda| > 1}} \phi_{\Lambda}(\omega)$$



Si $\beta < \beta_c$ o $h > h_c(\beta)$ entonces $|\mathcal{E}(\beta, h)| = 1$

TRANSICIÓN EN DIMENSIÓN 1 (DYSON 1969)

$$H_\Lambda^\phi(\omega) = -\sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\cap\Lambda\neq\emptyset} \frac{\delta_{\omega(\mathbf{x}),\omega(\mathbf{y})}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\alpha}$$



Si $\beta < \beta_c(\alpha)$ o $\alpha > 2$ entonces $|\mathcal{E}(\beta,\alpha)| = 1$

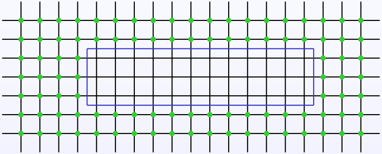
de lo contrario $\dim \mathcal{E}(\beta,\alpha) = |E| - 1$

PIROGOV–SINAI 1974–1975

Supongamos que el mínimo de energía se logra en un conjunto finito $\kappa := \{\omega^1, \ldots, \omega^k\}$ *de configuraciones invariantes por translación.*
Ciertas condiciones de estabilidad implican la existencia de $\beta_c > 0$, *y para cada* $\beta > \beta_c$ *medidas ergódicas* $\mu_{\omega^1}, \ldots, \mu_{\omega^k}$ *tal que*

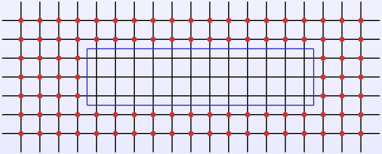
$$\mathcal{E}(\beta) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mu_{\omega^i} : \ \alpha_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}$$

PIROGOV–SINAI 1974–1975



la fase asociada $\omega^v(\mathbf{x}) = \bullet$
es el único estado de gibbs μ tal que

$$\mu(\omega|\omega^v) = \frac{\exp\Big(-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega \times \omega^v)\Big)}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\beta\phi}(\omega^v)}$$



la fase asociada $\omega^v(\mathbf{x}) = \bullet$
es el único estado de gibbs μ tal que

$$\mu(\omega|\omega^r) = \frac{\exp\Big(-\beta\, H_\Lambda^\phi(\omega \times \omega^r)\Big)}{\mathcal{Z}_\Lambda^{\beta\phi}(\omega^r)}$$

COMENTARIOS

- Existencia y unicidad de límite termodinámico
- Diagramas de fase
- Propiedades estadísticas de las fases
- Equivalencia de ensembles

PROYECTOS

- Existencia del límite de temperatura cero $\lim_{\beta\to\infty} \mu^{\beta\phi}$
- Velocidad de aproximación

$$\mu_\Lambda^{\beta\phi} \longrightarrow \mu^{\beta\phi}$$

  versus coexistencia de fases
- Cuasi–cristales como medidas de equilibrio para $\beta = \infty$

¡MUCHAS GRACIAS!

Presentación en línea
http://www.ifisica.uaslp.mx/~ugalde